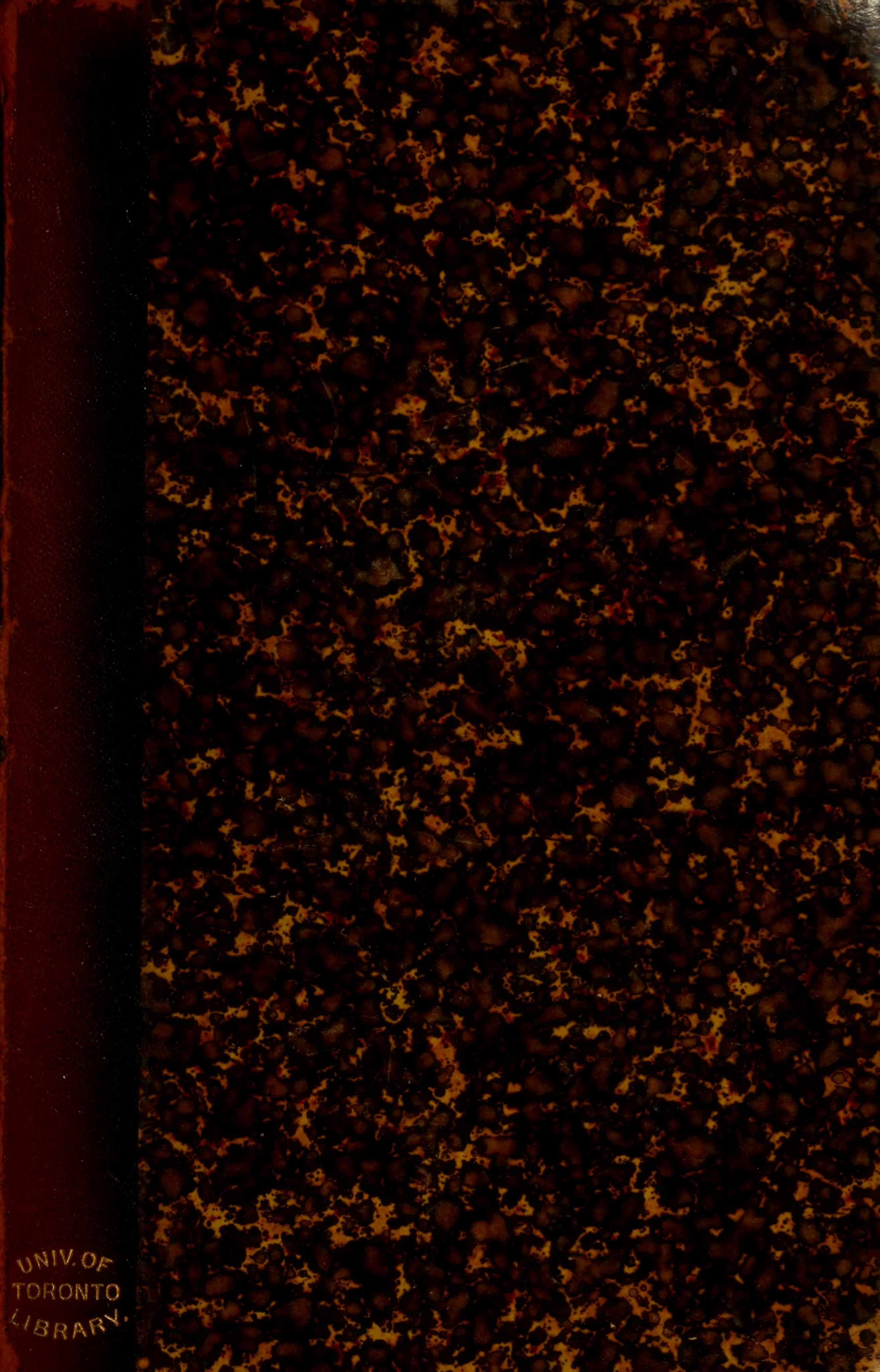
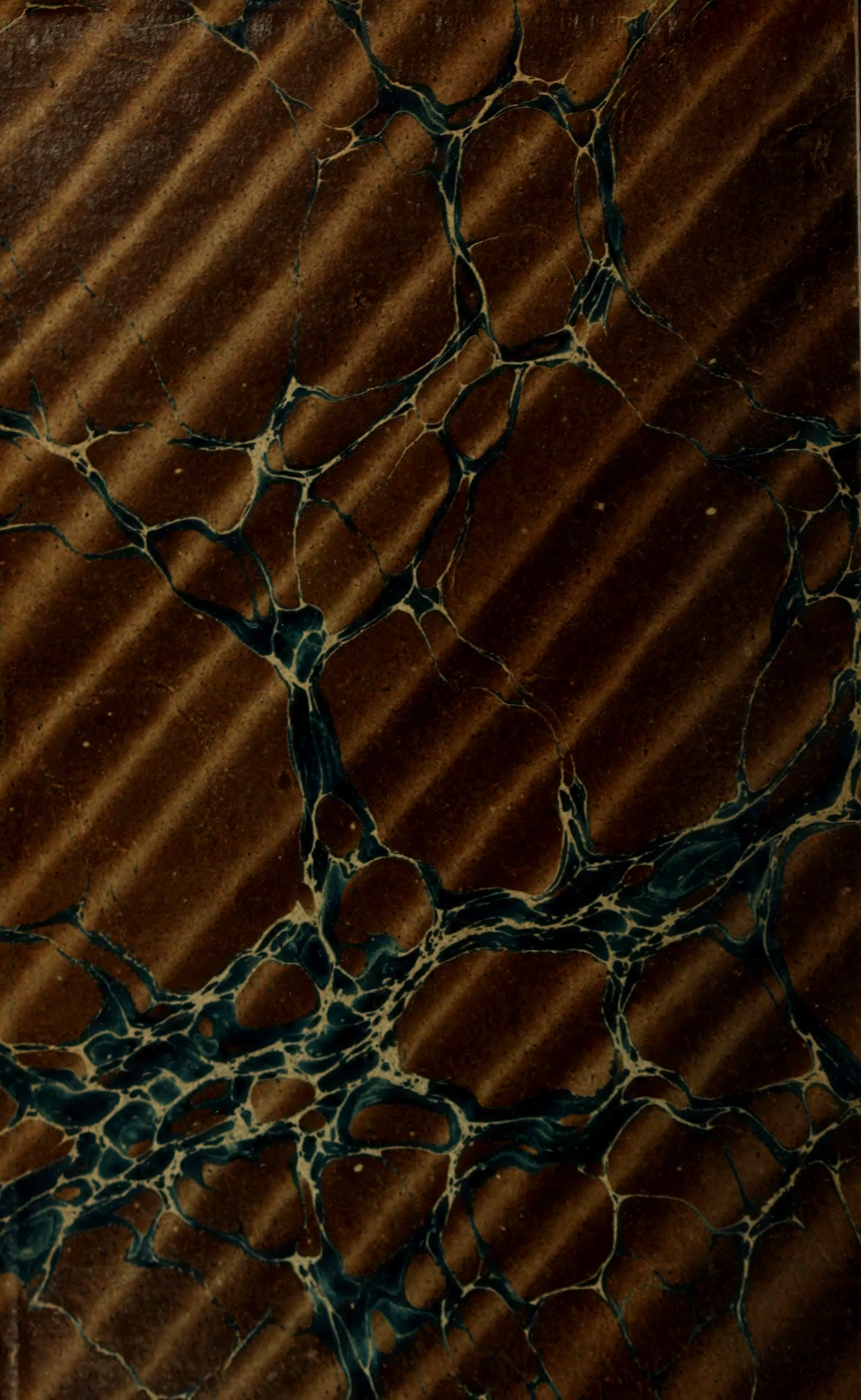
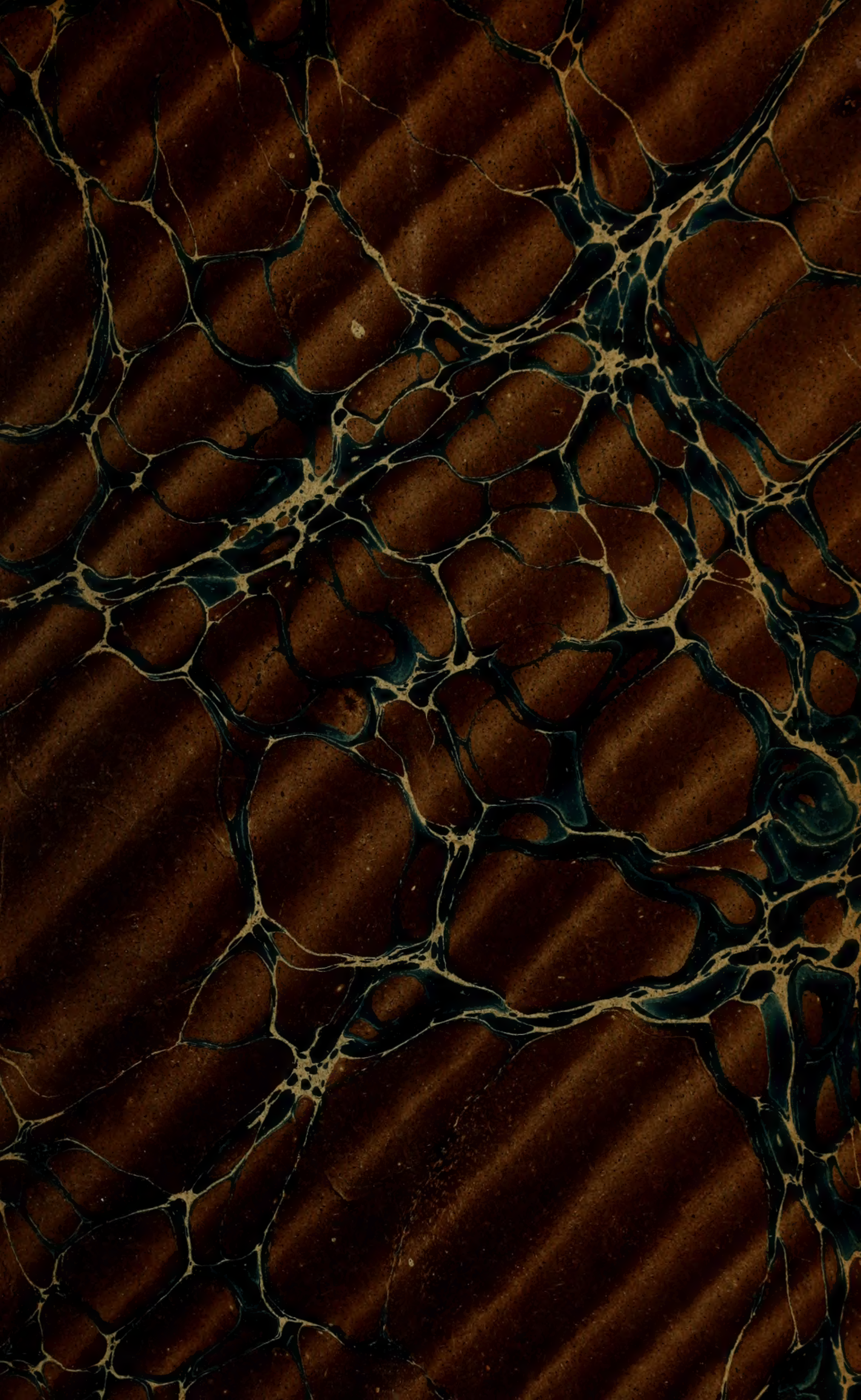
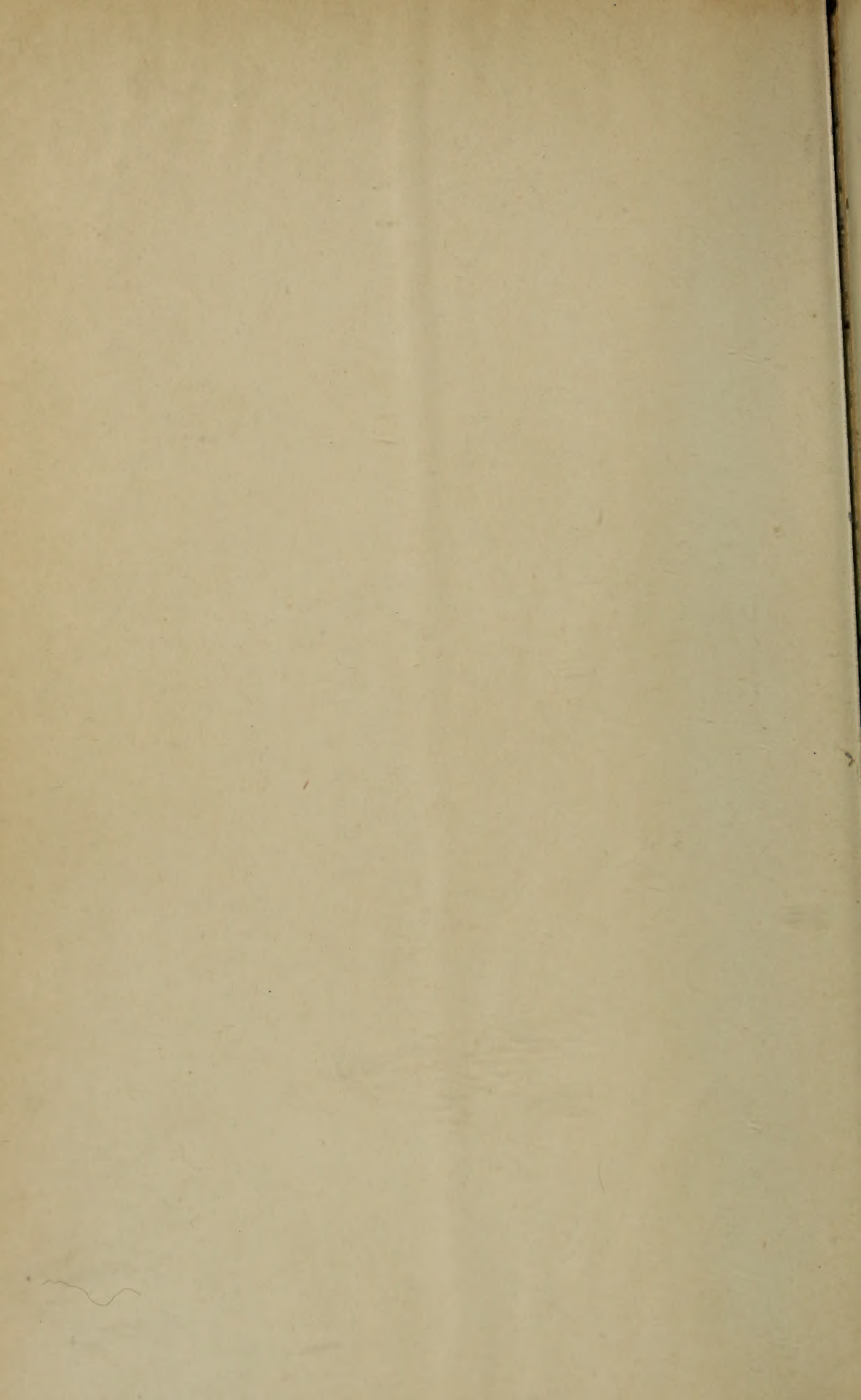

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY.







NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1889


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME HUITIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LE NOMBRE DES RACINES COMMUNES A PLUSIEURS ÉQUATIONS SIMULTANÉES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

La recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées a fait autrefois l'objet des travaux de Cauchy, et de Liouville et Sturm. Plus récemment M. Kronecker a rencontré aussi cette question dans ses profondes recherches sur les caractéristiques des systèmes de fonctions de plusieurs variables (*Monatsberichte*, 1869). Je viens de traiter ce problème dans mon Cours à la Faculté des Sciences; un résumé de la Leçon que j'ai faite à ce sujet pourra peut-être intéresser les lecteurs de ce Recueil. Nous allons nous borner aux cas de deux et de trois équations simultanées; l'extension de la méthode à un nombre quelconque d'équations ne présenterait aucune difficulté.

1. Soient d'abord les deux équations

$$F_1(x, y) = 0,$$
$$F_2(x, y) = 0,$$

F_1 et F_2 étant des fonctions continues de x et y ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans une certaine région du plan. Soit dans cette région une courbe fermée C; je suppose qu'il n'y ait pas sur cette

courbe de point correspondant à une solution commune aux deux équations précédentes.

Je considère l'intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_C P\,dx + Q\,dy.$$

prise le long du contour C et dans le sens direct, c'est-à-dire en ayant à sa gauche l'aire enveloppée. On a posé

$$P = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{F_1^2 + F_2^2}, \qquad Q = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{F_1^2 + F_2^2}.$$

Un calcul immédiat montre que l'on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On en conclut de suite, d'après un théorème bien connu, que l'intégrale sera nulle si P et Q sont continues à l'intérieur de C, c'est-à-dire s'il n'y a pas de racine commune aux deux équations à l'intérieur de ce contour.

Supposons maintenant qu'il y ait à l'intérieur de C *un* point A correspondant à une racine commune aux deux équations. Au lieu de calculer I en intégrant le long de C, nous pouvons intégrer le long d'une courbe quelconque entourant le point A. Or prenons ce point pour origine, et développons F_1 et F_2 d'après la formule de Taylor

$$F_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + \ldots.$$
$$F_2(x, y) = a_2 x + b_2 y + \ldots;$$

je dis que l'intégrale ne changera pas de valeur, si nous réduisons F_1 et F_2 à ses termes du premier degré. En effet, concevons qu'on intègre le long d'un cercle de rayon ρ ayant A pour centre; nous aurons dans l'inté-

grale I un terme indépendant de ρ, et une partie devenant infiniment petite avec ρ. Le terme indépendant de ρ n'est autre que l'intégrale I où F_1 et F_2 sont remplacées par

$$a_1 x + b_1 y \quad \text{et} \quad a_2 x + b_2 y;$$

la seconde partie doit disparaitre, puisque l'intégrale ne dépend pas de ρ.

Nous avons donc

$$I = \frac{D}{2\pi} \int_C \frac{x\,dx - y\,dx}{[(a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2]},$$

où

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Nous devons par suite calculer la valeur de l'intégrale précédente le long d'une courbe, d'ailleurs quelconque, enveloppant une fois l'origine. Pour faire rapidement le calcul, intégrons le long de l'ellipse

$$\text{(E)} \qquad (a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 = 1.$$

En désignant par α et β les angles faits par la normale extérieure à la courbe avec les axes Ox et Oy, nous avons d'ailleurs d'une manière générale, en désignant par ds l'élément d'arc essentiellement positif,

$$dx = -\,ds \cos\beta, \qquad dy = ds \cos\alpha;$$

l'intégrale devient donc

$$I = \frac{D}{2\pi} \int (x \cos\alpha + y \cos\beta)\, ds,$$

ou, en appelant r le rayon vecteur allant du centre de l'ellipse à l'élément ds et φ l'angle aigu fait par ce rayon vecteur avec la normale

$$I = \frac{D}{2\pi} \int r \cos\varphi \, ds.$$

Mais il est manifeste que l'intégrale qui figure dans le second membre représente le double de l'aire de l'ellipse. Or on trouve de suite que l'aire de l'ellipse représentée par l'équation (E) est égale à

$$\frac{\pi}{|D|},$$

en désignant par $|D|$ la valeur absolue de D. On a donc

$$I = \frac{D}{|D|}$$

et, par suite, $I = \pm 1$, suivant que D est positif ou négatif.

Quant à D, ce n'est autre chose que la valeur du déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix},$$

au point A. Dans le cas donc où il y a à l'intérieur de C une seule racine, la valeur de l'intégrale I sera ± 1, suivant que le déterminant fonctionnel de F_1 et F_2 au point A est positif ou négatif.

S'il y a à l'intérieur de C un nombre quelconque de racines, on conclut immédiatement de ce qui précède le théorème suivant :

La valeur de I *est égale à la différence entre le nombre des racines contenues dans* C, *pour lesquelles le déterminant fonctionnel est positif, et celles pour lesquelles le déterminant fonctionnel est négatif.*

Il est clair que nous avons exclu de notre analyse le

cas où pour une racine le déterminant fonctionnel serait nul, c'est-à-dire le cas des solutions multiples.

Remarquons encore que le théorème précédent aurait pu être établi plus rapidement, puisque l'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_C d\left(\text{arc tang} \frac{F_2}{F_1}\right),$$

mais j'ai voulu suivre une marche entièrement analogue à celle dont je vais faire usage pour le cas de trois équations.

2. Soient maintenant les trois équations

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0,$$
$$F_3(x, y, z) = 0,$$

et S une surface fermée limitant un certain volume. Je considère l'intégrale suivante étendue à la surface F

$$I = \frac{1}{4\pi} \iint A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy,$$

où

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{dx} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On vérifie facilement que, quelles que soient les trois fonctions F_1, F_2 et F_3, on a l'identité

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Par conséquent, d'après une proposition bien connue, l'intégrale I ne change pas quand on déforme la surface d'intégration S sans rencontrer de points où A, B et C cessent d'être continus. Il en résulte que l'intégrale I sera nulle, s'il n'y a pas de racines communes aux trois équations à l'intérieur de S.

Supposons maintenant qu'il y ait à l'intérieur de S *un* point A correspondant à une racine commune aux trois équations. Au lieu de calculer I en intégrant le long de S, nous pouvons intégrer le long d'une surface quelconque entourant le point A. Or prenons ce point pour origine, et développons F_1, F_2, F_3 d'après la formule de Taylor

$$F_1(x, y, z) = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots,$$
$$F_2(x, y, z) = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots,$$
$$F_3(x, y, z) = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots.$$

Nous montrerions ici, comme plus haut, que l'intégrale ne change pas de valeur, si nous réduisons F_1, F_2 et F_3 à ses termes du premier degré. L'intégrale I

devient alors

$$I = \frac{D}{4\pi} \int\int \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{\left\{ \begin{array}{l} [(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 \\ \quad + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2]^{\frac{3}{2}} \end{array} \right\}},$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

qui est supposé essentiellement différent de zéro.

En désignant par α, β, γ les cosinus des angles faits par la normale extérieure à la surface d'intégration avec les axes de coordonnées et en appelant $d\sigma$ l'élément essentiellement positif de la surface, nous devons poser

$$dy\,dz = \cos\alpha\,d\sigma, \qquad dz\,dx = \cos\beta\,d\sigma, \qquad dx\,dy = \cos\gamma\,d\sigma.$$

Si donc nous intégrons le long de l'ellipsoïde E

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 \\ \qquad\qquad + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 = 1, \end{array} \right.$$

l'intégrale deviendra

$$I = \frac{D}{4\pi} \int\int (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma,$$

ou, en appelant r le rayon vecteur allant du centre de l'ellipsoïde à l'élément $d\sigma$, et φ l'angle aigu fait par le rayon vecteur avec la normale,

$$I = \frac{D}{4\pi} \int\int r\cos\varphi\,d\sigma.$$

Mais l'intégrale double, qui figure dans le second membre, est égale à trois fois la somme des pyramides élémentaires de sommet A et de base $d\sigma$, et par conséquent égale à trois fois le volume de l'ellipsoïde E. Or

on trouve sans peine que le volume de (E) est égal à

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{|D|};$$

par suite, on a encore l'égalité

$$I = \frac{D}{|D|}$$

et nous arrivons finalement au même énoncé que pour le cas de deux équations :

L'intégrale I *est égale à la différence entre le nombre des racines contenues dans* S, *pour lesquelles le déterminant fonctionnel*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est positif, et celles pour lesquelles ce déterminant est négatif.

On voit le rôle important joué par le signe du déterminant fonctionnel ; c'est seulement quand ce déterminant aura un signe invariable à l'intérieur de S que les considérations précédentes donneront le nombre exact des racines. Ainsi, par exemple, pour le cas de deux équations

$$F_1(x,y) = 0,$$
$$F_2(x,y) = 0,$$

si $F_1 + iF_2$ est une fonction analytique de $x + iy$, le déterminant fonctionnel sera une somme de carrés ; on aura donc exactement par l'intégrale I le nombre des

racines situées dans un contour, et l'on retombera ainsi sur le théorème de Cauchy.

Pareillement, étant données les deux équations

$$P(x, y) = 0,$$
$$Q(x, y) = 0,$$

où P et Q désignent cette fois des fonctions analytiques, uniformes et continues des deux variables complexes x et y (nous posons $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$), ces deux équations reviennent aux quatre équations réelles

$$P_1(x', x'', y', y'') = 0,$$
$$P_2(x', x'', y', y'') = 0,$$
$$Q_1(x', x'', y', y'') = 0,$$
$$Q_2(x', x'', y', y'') = 0,$$

et l'on pourra représenter par une intégrale définie le nombre des racines communes à ces quatre équations, correspondant à des points situés à l'intérieur d'une surface S de l'espace à quatre dimensions (x', x'', y', y''); le déterminant fonctionnel des quatre fonctions P et Q a en effet un signe invariable.

NOTE SUR LA QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1887;

Par M. de SAINT-GERMAIN.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Rouché.

Puisque vous avez bien voulu me dire que je pourrais être utile à quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* en

leur indiquant une solution du problème de Mécanique proposé à l'Agrégation en 1887, je vais montrer qu'on peut, par la voie la plus naturelle, arriver à cette solution et la pousser aussi loin que le permettent d'ordinaire les problèmes sur le mouvement des systèmes matériels.

Soit S un cône droit, homogène, dont le sommet O est immobile et dont chaque élément m est attiré vers un point fixe F par une force égale au produit de sa masse par sa distance au point F et par une constante ω^2; la hauteur OH du cône est égale à a, le rayon de base à $2a$, OF à $\frac{8}{5}a$; enfin, à l'instant initial, l'angle FOH est droit et S animé d'une vitesse de rotation $\omega\sqrt{2}$ autour de la bissectrice de cet angle. On demande de déterminer le mouvement ultérieur du cône et la réaction du point fixe; OM étant l'axe représentatif de la rotation instantanée, montrer que le point M décrit, dans le cône et dans l'espace, deux herpolhodies et chercher les quadriques correspondantes; indiquer la position relative des cônes lieux de l'axe instantané dans le solide S et dans l'espace.

Prenons trois axes rectangulaires fixes, OX_1, OY_1, OZ_1, dont le dernier est dirigé suivant OF, et trois axes OX, OY, OZ liés invariablement au cône, OZ étant dirigé suivant OH. Nous chercherons d'abord les moments d'inertie A et C de S par rapport à OX ou OY et par rapport à OZ : ε étant la densité du cône, μ sa masse, on trouve bien aisément

$$A = \int_0^a 4\pi\varepsilon z^2\left(\frac{4z^2}{4} + z^2\right)dz = \frac{8}{5}\pi\varepsilon a^5 = \frac{6}{5}\mu a^2,$$

$$C = \int_0^a 4\pi\varepsilon z^2\,\frac{4z^2}{2}\,dz = A;$$

cette égalité simplifiera beaucoup les résultats que nous devons obtenir.

D'autre part, les attractions qui s'exercent suivant la loi donnée ont, comme on sait, une résultante R appliquée au centre de gravité G du cône et égale à $\mu\omega^2 GF$. Nous définirons la position du solide à l'aide des trois angles d'Euler θ, ψ, φ. Le couple qu'on introduit en transportant R parallèlement à elle-même au point O a son axe K dirigé dans le plan des $x_1 y_1$, faisant avec OX_1 l'angle $180° + \psi$ et égal à

$$\begin{aligned}&\mu\omega^2 GF \times OF \sin GFO\\ &\quad = \mu\omega^2 OF \times OG \sin GOF = \frac{6}{5}\mu\omega^2 a^2 \sin\theta.\end{aligned}$$

Il est facile de trouver les projections de l'axe K sur les axes mobiles et de former les équations d'Euler : en les divisant par $\frac{6}{5}\mu\omega^2 a^2$, elles deviennent

$$(1)\qquad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 \sin\theta\cos\varphi, \qquad \frac{dq}{dt} = \omega^2\sin\theta\sin\varphi, \qquad \frac{dr}{dt} = 0.$$

La dernière donne immédiatement, eu égard aux conditions initiales,

$$(2)\qquad r = \omega.$$

Pour obtenir d'autres intégrales, je rappelle les relations qui existent entre p, q, r et les dérivées des angles d'Euler,

$$(3)\qquad \begin{cases} p = \sin\theta\sin\varphi\,\dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\,\dfrac{d\theta}{dt},\\[2mm] q = \sin\theta\cos\varphi\,\dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\,\dfrac{d\theta}{dt},\\[2mm] r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Cela posé, éliminons ω^2 entre les deux premières

équations (1) :

$$\sin\varphi \frac{dp}{dt} + \cos\varphi \frac{dq}{dt} = 0;$$

multiplions par $\sin\theta\, dt$ et intégrons par parties; nous aurons

$$\begin{aligned}&\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\\ &\quad-\int(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cos\theta\, d\theta\\ &\quad-\int(p\cos\varphi - q\sin\varphi)\sin\theta\, d\varphi = \text{const.}\end{aligned}$$

ou, en remplaçant p et q par leurs valeurs (3),

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} - \int \sin\theta\left(\cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right) d\theta = \text{const.};$$

le coefficient de $\sin\theta\, d\theta$ est égal à r ou à ω et l'on a, en intégrant,

$$(4) \qquad \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} + \omega\cos\theta = \omega.$$

Ajoutons enfin les deux premières équations (1) après les avoir multipliées par $2p$ et $2q$:

$$\begin{aligned}2p\frac{dp}{dt} + 2q\frac{dq}{dt} &= -2\omega^2\sin\theta(p\cos\varphi - q\sin\varphi)\\ &= -2\omega^2\sin\theta\frac{d\theta}{dt};\end{aligned}$$

l'intégrale est, en tenant compte des données initiales,

$$(5) \qquad p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} = \omega^2(1 + 2\cos\theta).$$

On eût pu écrire directement les intégrales (2), (4) et (5); les deux premières expriment que les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement sur OZ et sur OZ_1 sont constantes; et, en effet, d'après une remarque de M. Resal, la vitesse de l'extrémité de

cet axe est représentée par K, perpendiculaire sur OZ et sur OZ_1 ; l'intégrale (5) est celle des forces vives, le travail de R étant, comme on sait,

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2\left[\overline{(\mathrm{GF})}_0^2 - \overline{\mathrm{GF}}^2\right] = \frac{6}{5}\mu a^2\omega^2\cos\theta.$$

De l'équation (4) nous tirerons

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1+\cos\theta}, \tag{6}$$

et, en substituant cette valeur dans (5), nous aurons

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2\,\frac{\cos\theta(2+\cos\theta)}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}. \tag{7}$$

Si l'on pose $\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{u}{\sqrt{2}}$, on peut tirer de cette équation

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\mathrm{am}\left(\omega t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\qquad\left(\mathrm{mod}\;\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

mais, sans recourir aux fonctions elliptiques, on peut conclure des équations (6) et (7) que θ décroît d'abord depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ pour revenir à $\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite, tandis que ψ croît constamment et sans limite. Sur une sphère décrite du point O comme centre avec a pour rayon, le lieu du point H sera une courbe formée, en général, d'une infinité de boucles tangentes au grand cercle situé dans le plan des x_1y_1 et s'entrecoupant au point qui est sur la partie positive de OZ_1.

L'équation (2) et la dernière des équations (3) donnent

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1+\cos\theta} = \frac{d\psi}{dt};$$

on peut choisir les axes de sorte que φ et ψ s'annulent pour $t = 0$; ces deux angles seront constamment égaux, ce qui achève de nous faire connaître le mouvement du cône.

Il s'agit de calculer la réaction E exercée par le point fixe. Soit J l'accélération du centre de gravité; les forces extérieures R et E ayant pour résultante $J\mu$, on en pourra conclure la projection de E sur un axe quelconque. Je chercherai les composantes de E : 1° suivant la trace OU du plan OXY sur OX_1Y_1; 2° suivant la droite OV perpendiculaire à OU dans le plan des xy; 3° suivant OZ; c'est celles qu'on calculera le plus facilement si l'on se rappelle les formules de Rivals qui expriment les composantes de l'accélération d'un point x, y, z d'un solide, savoir :

$$J_x = p(px + qy + rz) - \omega^2 x + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt},$$

$$J_y = q(px + qy + rz) - \omega^2 y + x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt},$$

$$J_z = r(px + qy + rz) - \omega^2 z + y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}.$$

Remplaçons x, y, z par les coordonnées 0, 0, $\frac{3}{4}a$ du point G, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ par leurs valeurs (1), p, q, r par leurs valeurs (3) et supposons $\varphi = 0$: nous aurons les projections de l'accélération du point G sur OU, OV, OZ :

$$J_u = \frac{3}{4}a\omega\frac{d\theta}{dt},$$

$$J_v = -\frac{3}{4}a\omega\sin\theta\left(\omega - \frac{d\psi}{dt}\right),$$

$$J_z = -\frac{3}{4}a\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right).$$

Les projections de R sont

$$R_u = 0,$$

$$R_v = \frac{8}{5}\mu\omega^2 a \sin\theta,$$

$$R_z = \mu\omega^2 a\left(\frac{8}{5}\cos\theta - \frac{3}{4}\right).$$

On trouve, en définitive,

$$E_u = 2I_t - R_u = \frac{3}{4}\mu a\omega\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{4}\mu\omega^2 a\frac{\sqrt{\cos^2\theta - 2\cos\theta}}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

$$E_v = -\frac{\mu\omega^2 a\sin\theta}{20}\,\frac{2 - 17\cos\theta}{1-\cos\theta},$$

$$E_z = -\frac{31}{10}\mu\omega^2 a\cos\theta,$$

et la discussion de ces formules n'offre pas de difficultés.

Considérons maintenant l'axe OM qui représente la rotation instantanée ϖ de S et cherchons le lieu V du point M dans le cône. Les coordonnées relatives de ce point sont p, q, r : r restant égale à ω, la ligne V est située dans un plan Π qui coupe orthogonalement OZ en un point fixe P à la distance ω de l'origine; faisons $PM = \rho$, $MPM_1 = \lambda$ et cherchons comment varient ces coordonnées avec le temps. On a d'abord

$$\rho^2 = p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} - \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} = \omega^2(1 - 2\cos\theta),$$

$$(8)\qquad \cos\theta = \frac{\rho^2 - \omega^2}{2\omega^2}.$$

Différentiant la valeur de ρ^2, élevant au carré et tenant compte de l'équation (7), on a

$$\rho^2\frac{d\rho^2}{dt^2} = \omega^4\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^6(1 - \cos\theta)(\cos\theta)(1 - 2\cos\theta)$$

ou, en remplaçant $\cos\theta$ par sa valeur (8),

$$(9) \qquad \rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = -\frac{1}{4}(\rho^2 - \omega^2)(\rho^2 - 3\omega^2)(\rho^2 + 3\omega^2).$$

D'autre part, en vertu des équations (1), (3), (6), on a, pour le double de la vitesse aréolaire du point M,

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt} = \omega^2 \sin\theta (p \sin\varphi + q\cos\varphi)$$
$$= \omega^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} \qquad = \omega^3 (1 - \cos\theta):$$

remplaçant encore $\cos\theta$ par sa valeur (8), il vient

$$(10) \qquad \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\omega(3\omega^2 - \rho^2),$$

M. Darboux a montré que la forme des équations (9) et (10) est caractéristique : elles définissent le mouvement d'un point qui décrit une herpolhodie, dans l'acception générale du mot. Soit un mouvement de Poinsot défini par les équations

$$\frac{1}{a}\frac{dp'}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) q' r', \qquad \ldots;$$

les quantités $\sum \frac{p'^2}{a}$, $\sum \frac{p'^2}{a^2}$ ont des valeurs constantes h, g^2, et la quadrique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

touche un plan fixe aux divers points de l'herpolhodie correspondante; les variations des coordonnées ρ, λ du point de contact sont données par les équations

$$\rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = -h\left(\rho^2 - \frac{m}{ag^2 - h}\right)\left(\rho^2 - \frac{m}{bg^2 - h}\right)\left(\rho^2 - \frac{m}{cg^2 - h}\right),$$
$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{h\rho^2 - m}{g},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$m = -\frac{1}{hg^2}(ag^2 - h)(bg^2 - h)(cg^2 - h).$$

Il suffit d'identifier les dernières aux équations (9) et (10) pour avoir

$$h = \frac{1}{4}, \qquad g = \frac{1}{2\omega}, \qquad m = -\frac{3}{4}\omega^2,$$
$$a = -2\omega^2, \qquad b = 0, \qquad c = 2\omega^2.$$

La quadrique qui correspond à l'herpolhodie V se réduit donc à un hyperboloïde à deux nappes infiniment aplati et la polhodie est un arc de l'hyperbole équilatère représentée par l'équation $z^2 - x^2 = 2\omega^2$. L'équation de l'herpolhodie V s'obtient en éliminant dt entre les équations (9) et (10); la forme de cette équation et le fait, aisé à établir, que V n'a pas de point d'inflexion, montrent que cette courbe ressemble à une hypocycloïde dont les festons toucheraient le cercle décrit du point P comme centre avec ω pour rayon, tandis que les points de rebroussement seraient sur un cercle de rayon $\omega\sqrt{3}$. Le rayon vecteur PM tourne constamment dans le sens positif : comme il varie entre ω et $\omega\sqrt{3}$, OM varie entre $\omega\sqrt{2}$ et 2ω, ce qui limite l'arc d'hyperbole qui joue le rôle de polhodie; quand OM atteint sa limite 2ω, le plan de l'hyperbole est perpendiculaire au plan II.

Dans l'espace, les coordonnées du point M sont égales aux composantes de la rotation w suivant les axes fixes,

$$p_1 = \cos\psi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\sin\psi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$q_1 = \sin\psi\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\cos\psi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$r_1 = \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta\frac{d\varphi}{dt}.$$

Nous avons pu faire en sorte que les φ et ψ fussent constamment égaux; on aura donc

$$p_1 = p, \qquad q_1 = -q, \qquad r_1 = r;$$

il en résulte évidemment que, dans l'espace, le point M décrit une herpolhodie V_1 égale à V, située dans un plan Π_1 qui coupe orthogonalement l'axe OZ_1 en un point P_1 tel que OP_1 soit égal à ω; seulement, le rayon vecteur P_1M tourne dans le sens négatif.

On pourrait donner au solide S le mouvement qu'il prend dans les conditions données en supposant qu'il soit lié invariablement à un cône (C) qui aurait O pour sommet, V pour base et faisant rouler (C) sur un cône égal (C_1) qui a V_1 pour base; les deux cônes seront constamment symétriques par rapport à leur plan tangent commun; toutefois, ils coïncideront quand leur génératrice commune passera par l'un des points de rebroussement de V et de V_1; la rotation instantanée est mesurée à chaque instant par la distance du point fixe au point de contact de V et de V_1.

NOTES SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES SÉRIES;

Par M. Auguste GUTZMER.

Dans ses *Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries* (¹), M. Cesaro s'occupe de telles séries où le quotient de deux termes consécutifs peut devenir aussi grand que l'on voudra, bien que la série soit convergente. Peut-être n'est-il pas sans intérêt de constater

(¹) *Voir* ce Recueil, 3ᵉ série, t. VII, p. 401 à 407.

qu'on connaît depuis longtemps des séries jouissant de cette propriété. Ainsi M. Stern dit, dans une Note de son *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (¹) : *Wenn die Glieder theils zunehmen, theils abnehmen, lassen sie sich, wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier möglichen Fälle, eine allgemeine Regel geben*. Cette petite remarque prouve que M. Stern a eu en vue, en effet, des séries jouissant de ladite propriété; mais il ne donne aucun exemple.

De même M. Eugène Catalan a considéré ces séries et il a consacré, dans son *Traité élémentaire des séries* (²), un paragraphe à *des séries à termes croissants et décroissants*. Dans les n°s 40 et 41 de son Livre il dit : « Jusqu'à présent, nous avons supposé que les termes de la série proposée décroissent indéfiniment, du moins à partir de l'un deux ; et nous avons indiqué diverses règles au moyen desquelles on peut, dans tous les cas, reconnaître la convergence ou la divergence. Mais il peut arriver que le terme général u_n, tout en ayant pour limite zéro, soit exprimé par une fonction de n tantôt croissante et tantôt décroissante. Il paraît très difficile de trouver des règles simples, relatives à ce cas singulier. Nous nous contenterons d'énoncer la proposition suivante :

Théorème XV. — *Si les quantités*

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots,\quad u_n,$$

en nombre infini, peuvent former des groupes

$$\begin{aligned} g_1 &= u_1 + u_2 + \ldots + u_p, \\ g_2 &= u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q, \\ g_3 &= u_{q+1} + u_{q+2} + \ldots + u_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

(¹) Leipzig, 1860, p. 91.
(²) Paris, 1860, p. 27.

qui diminuent indéfiniment (en valeur absolue); les séries

$$(\mathrm{U}) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(\mathrm{G}) \qquad g_1 + g_2 + \ldots + g_i + \ldots$$

sont en même temps convergentes, divergentes ou indéterminées. De plus, si elles sont convergentes, elles ont même somme.

M. Catalan n'a pas énoncé le théorème démontré par M. E. Weyr (¹). Mais il en a donné, dans le n° 42 de son Traité, trois exemples. En premier lieu, il considère la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots,$$

dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{(n + 1 + \cos n\pi)^2}.$$

En posant généralement

$$g_i = \frac{1}{(2i - 1)^2} + \frac{1}{(2i + 2)^2},$$

M. Catalan conclut que $g_i < \frac{1}{2(i-1)^2}$; par conséquent la série (G) est convergente et, d'après le théorème cité ci-dessus, de même la série (U). En second lieu, M. Catalan démontre, par un groupement analogue, la divergence de la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n + 1 + \cos n\pi},$$

et, en dernier lieu, il démontre, de la même manière, la

(¹) *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, t. VIII, p. 97 à 100.

convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sin \frac{n\pi}{2} - n^2 \cos \frac{n\pi}{2}}.$$

Cette remarque littéraire montre qu'on a déjà connu depuis longtemps des séries jouissant de ladite propriété; mais il restait dans la théorie de ces séries une lacune, remplie maintenant par les nouvelles recherches provoquées par les deux articles de M. Lerch [1]. Quant à ces derniers, ajoutons quelques remarques tirées d'une lettre que M. Lerch m'a adressée.

Dans les *Contributions à la théorie des séries infinies*, M. Lerch a employé la notion, un peu généralisée, du dérivé d'un ensemble de points (*Punktmenge*), dans le sens de M. G. Cantor, pour les éléments de la théorie des séries. En particulier, il a considéré l'ensemble caractérisé par la formule $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$, où les u_ν sont les termes positifs de la série infinie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Il a reconnu alors que la convergence de la série u n'a pas pour conséquence l'existence d'une limite de $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ (pour ν infini), mais que ce quotient peut surpasser même toute quantité donnée. Il a montré cela pour quelques cas particuliers qui sont de la forme

$$(1) \qquad a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots,$$

---

(1) *Contributions à la théorie des séries infinies* (*Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohème*. Prague, 13 mars 1885).

Remarque sur la Théorie des séries (*Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, t. VII, p. 79).

où Σa_ν et Σb_ν sont des séries convergentes; les exemples *plus simples* de M. Cesaro sont du même type.

M. Lerch m'écrit qu'il n'aurait pas publié ces séries-là s'il n'avait pas eu, pour son but, un autre exemple. Pour démontrer le théorème que la série $\Sigma \nu a_\nu x^{\nu-1}$ est convergente dans la même région que la série $\Sigma a_\nu x^\nu$, on s'appuie sur la remarque [1] que le quotient de deux termes consécutifs, du moins à partir de l'un d'eux, *doit* être inférieur à l'unité, ce qui n'est pas vrai. Mais, si l'on n'avait pas d'autres séries que celles de la forme (1), on appliquerait seulement la démonstration à chacune des séries régulières

$$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots$$
$$b_0 x + b_1 x^3 + b_2 x^5 + \ldots,$$

pour conclure de la convergence de la série

$$a_0 + b_0 x + a_1 x^2 + b_1 x^3 + a_2 x^4 + b_2 x^5 + \ldots$$

celle de la dérivée. C'est pourquoi M. Lerch a construit la série

$$(2) \qquad \sum_n \delta^{n-(\log n)} g^{\frac{1}{2}(\log n)(1+(\log n))} \qquad (0 < \delta < 1 < g),$$

où $(\log n)$ désigne la partie entière du logarithme vulgaire de n ou le nombre des chiffres de n; et c'est pourquoi celle-ci me semble être plus remarquable que celle de la forme (1).

En outre, les séries de la forme (1) et les séries analogues de la forme

$$a_0^1 + a_0^2 + \ldots + a_0^r + a_1^1 + a_1^2 + \ldots + a_1^r + \ldots$$
$$+ a_\nu^1 + a_\nu^2 + \ldots + a_\nu^r + \ldots$$

(1) *Voir*, par exemple, HARNACK, *Die Elemente der Differential und Integralrechnung*, Leipzig, 1881.

ont la propriété que, si le quotient de deux termes consécutifs peut devenir infiniment grand, il doit aussi devenir nécessairement infiniment petit. Cette circonstance ne s'offre pas dans la série (2) de M. Lerch.

La convergence de la série (2) n'exige pas, en effet, la condition $g < \frac{1}{\delta^2}$. Pour avoir un exemple d'une série irrégulière, il suffit de prendre

$$u_n = \delta^{n-(n)} g^{(n)^2} \qquad (0 < \delta < 1 < g),$$

où (n) est le nombre des chiffres de n. Mais, si n est de la forme $10^\nu - 1$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} = g^{2(n)+1}$; par conséquent, le quotient peut surpasser toute quantité donnée.

SUR LES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES;

Par M. Ch. de COMBEROUSSE.

---

1. Soit l'équation algébrique quelconque

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{z}$ de cette équation est

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \frac{A_2}{z^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-2}}{z^2} + \frac{A_{m-1}}{z} + A_m = 0;$$

z étant supposé différent de zéro, multiplions les deux membres par z^m et renversons l'ordre des termes; nous

aurons

$$z^m \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + A_{m-2} z^{m-2} + \ldots + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0.$$

On obtient donc la transformée en $\frac{1}{z}$ en échangeant dans la proposée les coefficients des termes également éloignés des extrêmes.

Pour obtenir maintenant la transformée en $-\frac{1}{z}$ de l'équation $\varphi(z) = 0$, il suffit de changer z en $-z$ dans le résultat précédent. L'équation de la nouvelle transformée est ainsi :

$$(-z)^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = A_m(-z)^m + A_{m-1}(-z)^{m-1} + A_{m-2}(-z)^{m-2} + \ldots + A_2(-z)^2 + A_1(-z) + A_0 = 0.$$

Suivant que m sera *pair* ou *impair*, on changera dans le second membre les signes des termes de degré *impair* ou *pair*. De cette manière, le premier terme du second membre aura toujours le signe $+$, et le facteur $(-z)^m$ du premier membre sera toujours remplacé par z^m. On aura donc finalement, pour la transformée en $-\frac{1}{z}$,

$$z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = A_m z^m - A_{m-1} z^{m-1} + A_{m-2} z^{m-2} - \ldots \pm A_2 z^2 \mp A_1 z \pm A_0 = 0.$$

2. La dernière transformation effectuée conduit naturellement à l'étude des *équations réciproques de seconde espèce*.

On peut appeler ainsi toute équation $\varphi(z) = 0$ dont les racines, au lieu d'être simplement réciproques, sont *réciproques et de signes contraires*. A une racine $z = a$

répond alors une autre racine $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{a}$, et le produit des racines conjuguées, au lieu d'être égal à 1, est égal à -1.

La théorie des équations réciproques de seconde espèce est tout à fait analogue à celle des équations réciproques ordinaires.

3. Si l'équation $\varphi(z) = 0$ a ses racines réciproques et de signes contraires, elle a les mêmes racines que sa transformée en $-\frac{1}{z}$. On a donc identiquement, en désignant par λ un facteur constant approprié,

$$(1) \qquad \varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m \\ = \lambda A_m z^m - \lambda A_{m-1} z^{m-1} + \lambda A_{m-2} z^{m-2} - \ldots \\ \pm \lambda A_2 z^2 \mp \lambda A_1 z \pm \lambda A_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A_0 = \lambda A_m, \quad A_1 = -\lambda A_{m-1}, \quad A_2 = \lambda A_{m-2}, \quad \ldots, \\ A_{m-2} = \pm \lambda A_2, \quad A_{m-1} = \mp \lambda A_1, \quad A_m = \pm \lambda A_0. \end{aligned}$$

Il en résulte, en rapprochant les égalités extrêmes,

$$\frac{A_0}{A_m} = \lambda = \pm \frac{1}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = \pm 1.$$

On a donc les deux solutions

$$\lambda = \pm 1 \quad \text{et} \quad \lambda = \pm i.$$

La première conduit aux conditions

$$A_0 = \pm A_m, \quad A_1 = \mp A_{m-1}, \quad A_2 = \pm A_{m-2}, \quad \ldots;$$

la seconde, aux conditions

$$A_0 = \pm i A_m, \quad A_1 = \mp i A_{m-1}, \quad A_2 = \pm i A_{m-2}, \quad \ldots.$$

Mais on peut ramener les équations considérées à un type unique, en remarquant que les seules racines qui paraissent se correspondre *à elles-mêmes* sont données par la relation

$$z = -\frac{1}{z} \quad \text{ou} \quad z^2 = -1,$$

c'est-à-dire

$$z = \pm i.$$

Admettons donc que l'équation $\varphi(z) = 0$ ne possède aucune racine égale à $+i$ ou à $-i$, et reprenons l'identité

$$(1) \qquad \varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right).$$

En y faisant $z = +i$, on a, puisque $-\frac{1}{i} = +i$,

$$(2) \qquad \varphi(i) = \lambda(i)^m \varphi(i);$$

en y faisant $z = -i$, on a également

$$(3) \qquad \varphi(-i) = \lambda(-i)^m \varphi(-i).$$

$\varphi(i)$ et $\varphi(-i)$ étant différents de zéro par hypothèse, on a, en multipliant membre à membre, les relations (2) et (3), et en simplifiant,

$$1 = \lambda^2(-i^2)^m = \lambda^2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \pm 1.$$

Si l'on remplace maintenant λ par cette valeur, dans la relation (2) par exemple, il vient

$$\varphi(i) = \pm(i)^m \varphi(i) \quad \text{ou} \quad i^m = \pm 1;$$

ce qui exige que m soit *pair*.

Par suite, *lorsque l'équation réciproque de seconde espèce ne renferme aucune racine + i ou — i, la solution* $\lambda = \pm i$ *n'existe pas, l'équation est de degré pair.*

et les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont ALTERNATIVEMENT *égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.*

Supposons maintenant que l'équation $\varphi(z) = 0$ admette des racines $+i$ et $-i$, et mettons-les en évidence en écrivant

$$\varphi(z) = (z - i)^p (z + i)^q f(z).$$

L'équation $f(z) = 0$ n'aura, par hypothèse, aucune racine égale à $+i$ ou à $-i$, et elle renfermera les autres racines, conjuguées deux à deux, de l'équation $\varphi(z) = 0$, supposée réciproque de seconde espèce. L'équation $f(z) = 0$ sera donc elle-même réciproque de seconde espèce, et elle remplira alors les conditions que nous venons d'énoncer.

Or, il est toujours facile de débarrasser préalablement l'équation considérée des racines $\pm i$ qu'elle peut avoir. En substituant $+i$ ou $-i$ dans le premier membre de l'équation, on voit facilement si le résultat obtenu est nul; et, dans l'affirmative, on n'a qu'à diviser ce premier membre par $z - i$ ou $z + i$, pour supprimer la racine correspondante.

Au point de vue de leur résolution, il est donc permis de ne conserver, parmi les équations réciproques de seconde espèce, que celles qui sont de degré pair et dont les coefficients également éloignés des extrêmes sont alternativement égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.

4. Le type de ces équations est

$$(4) \quad \begin{cases} A_0 z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-3} + \ldots \\ \qquad + A_n z^n + \ldots - A_3 z^3 + A_2 z^2 - A_1 z + A_0 = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(5) \qquad z - \frac{1}{z} = u.$$

chaque couple de racines conjuguées $\left(\alpha \text{ et } -\frac{1}{\alpha}\right)$ conduit à une seule valeur de u qui est $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$. En éliminant z entre les équations (4) et (5), on obtiendra une équation en u de degré *moitié* ou de degré n.

Rapprochons dans le premier membre de l'équation (4) les termes également éloignés des extrêmes, après avoir divisé par z^n les deux membres de l'équation. On a ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} A_0\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) &+ A_1\left(z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &+ A_2\left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) \\ &+ A_3\left(z^{n-3} - \frac{1}{z^{n-3}}\right) + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à calculer en fonction de u les binômes

$$z^n + \frac{1}{z^n}, \quad z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}}, \quad z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}, \quad z^{n-3} - \frac{1}{z^{n-3}}, \quad \ldots,$$

où les signes $+$ et $-$ alternent. Pour cela, nous aurons recours à la relation générale

$$\left(z^k \pm \frac{1}{z^k}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right) = z^{k+1} \mp \frac{1}{z^{k+1}} - z^{k-1} \pm \frac{1}{z^{k-1}},$$

où l'on doit prendre ensemble les signes supérieurs et les signes inférieurs.

Il en résulte donc

$$(7)\qquad z^{k+1} \pm \frac{1}{z^{k+1}} = \left(z^k \mp \frac{1}{z^k}\right)u + \left(z^{k-1} \pm \frac{1}{z^{k-1}}\right).$$

En prenant alternativement les signes supérieurs et les signes inférieurs, cette formule donne l'expression d'un binôme quelconque en fonction de u, à l'aide des valeurs des deux binômes précédents. En partant des deux

binômes $z - \frac{1}{z} = u$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$, et en faisant successivement $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, nous aurons

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z - \frac{1}{z}\right) u + \left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right) = u^2 + 2,$$

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) u + \left(z - \frac{1}{z}\right) = u^3 + 3u,$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) u + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = u^4 + 4u^2 + 2,$$

$$z^5 - \frac{1}{z^5} = \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) u + \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) = u^5 + 5u^3 + 5u,$$

. . . .

Il est évident d'ailleurs que ces binômes sont bien ceux qu'on a à calculer; car, le premier terme de l'équation donnée étant supposé toujours positif, et les racines conjuguées deux à deux ayant un produit égal à -1, le dernier terme est alternativement négatif et positif dans les équations successives du deuxième, du quatrième, du sixième, du huitième, du dixième degré, ... qu'on peut avoir à considérer.

On voit que l'équation en u sera bien de degré n. Quand on l'aura résolue, les racines de l'équation en z seront fournies par la relation générale $z - \frac{1}{z} = u$, c'est-à-dire par l'équation du second degré

$$(8) \qquad z^2 - uz - 1 = 0,$$

dont le produit des racines est, pour chaque valeur de u et comme cela doit être, égal à -1. On a

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4}}{2},$$

et les n valeurs de u conduisent ainsi aux $2n$ valeurs de z.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE CONCERNANT LES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

On rencontre, en Géométrie descriptive, un certain nombre de problèmes qui consistent ou se ramènent immédiatement à *chercher les points d'intersection d'une droite avec une surface gauche du second degré, définie par trois directrices rectilignes, ou par deux directrices rectilignes et un plan directeur*. Les solutions que l'on donne généralement de ces questions nous ayant paru laisser à désirer, au point de vue de la simplicité et de l'élégance, nous avons pensé qu'il serait peut-être utile de faire connaître celles auxquelles nous avons été conduit, en nous appuyant sur les notions les plus élémentaires de Géométrie projective.

Nous résoudrons tout d'abord un problème relatif à la parabole, dont nous aurons à faire usage dans la suite de cette Note.

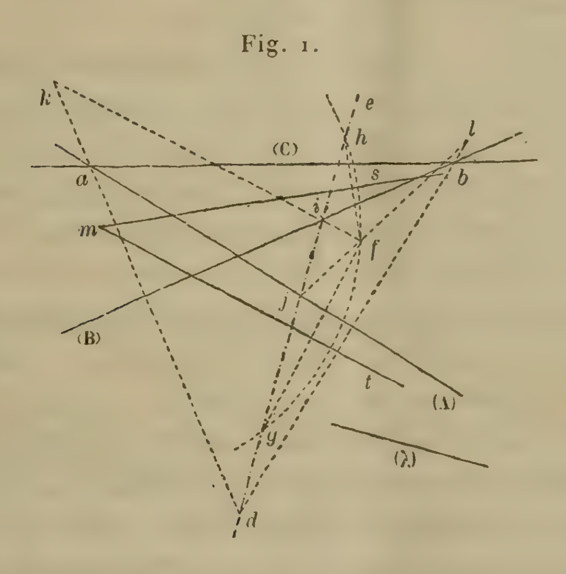
Mener, dans un plan, par un point donné m, une tangente à la parabole (ϖ) *qui touche trois droites données* (A), (B), (C), *et dont l'axe est parallèle à une direction donnée* (λ).

Soient a et b les points où la droite (C) coupe respectivement les droites (A) et (B) (*fig.* 1). D'après un théorème bien connu dû à Steiner [1], on obtient un

[1] *Les hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se coupent sur la directrice de cette courbe.*

point de la directrice de la parabole (ϖ), en prenant le point d d'intersection des perpendiculaires abaissées respectivement des points a et b sur les droites (B) et (A); par conséquent, la directrice est la perpendiculaire de

Fig. 1.



abaissée du point d sur la direction (λ). On a ensuite le foyer f, en remarquant que, le symétrique de ce point par rapport à une tangente quelconque étant sur la directrice, la droite symétrique de la directrice par rapport à cette tangente passe par le foyer. En conséquence, les symétriques des droites (A) et (B) par rapport à de se coupent au foyer f. La symétrique de de par rapport à (A) s'obtient d'ailleurs simplement en joignant le point j, où (A) coupe de, au point l symétrique de d par rapport à (A). La symétrique ik de de par rapport à (B) se construit de la même manière. Il n'y a plus maintenant qu'à appliquer la construction classique, qui fournit les tangentes menées d'un point donné à une parabole dont on connaît le foyer et la directrice. A cet effet, du point m comme centre on décrit une circonfé-

rence passant par f : on joint le point f aux points g et h de rencontre de cette circonférence avec la directrice de, et du point m on abaisse respectivement sur fg et fh les perpendiculaires ms et mt. Les droites ms et mt sont les tangentes cherchées [1].

Remarque. — Si, au lieu de connaître la direction de l'axe de la parabole, on en connaissait une quatrième tangente, on déterminerait, d'après le théorème de Steiner, un second point de la directrice de, et la construction s'achèverait comme précédemment.

I. *Construire une droite rencontrant quatre droites données.*

Soient (X), (Y), (Z), (T) quatre droites données, occupant dans l'espace des positions quelconques les unes par rapport aux autres. Imaginons la quadrique engendrée par une droite mobile Δ, s'appuyant sur les trois droites (X), (Y), (T), et considérons les deux points d'intersection de cette quadrique avec la droite (Z). Par chacun de ces points passe une droite, et une seule, telle que Δ. Les deux droites ainsi obtenues satisfont aux conditions du problème, lequel est par conséquent ramené à chercher les points de rencontre de la droite (Z) avec la quadrique gauche (Σ), qui a pour directrices les droites (X), (Y), (T).

Prenons, à cet effet, un point o sur (Z) et un plan (II) parallèle au plan passant par le point o et la droite

(1) Il est bien clair, d'ailleurs, que ces deux tangentes, dans certains cas, pourront être imaginaires. Les problèmes résolus dans cette Note étant des problèmes du second degré, une observation analogue s'applique à leur solution.

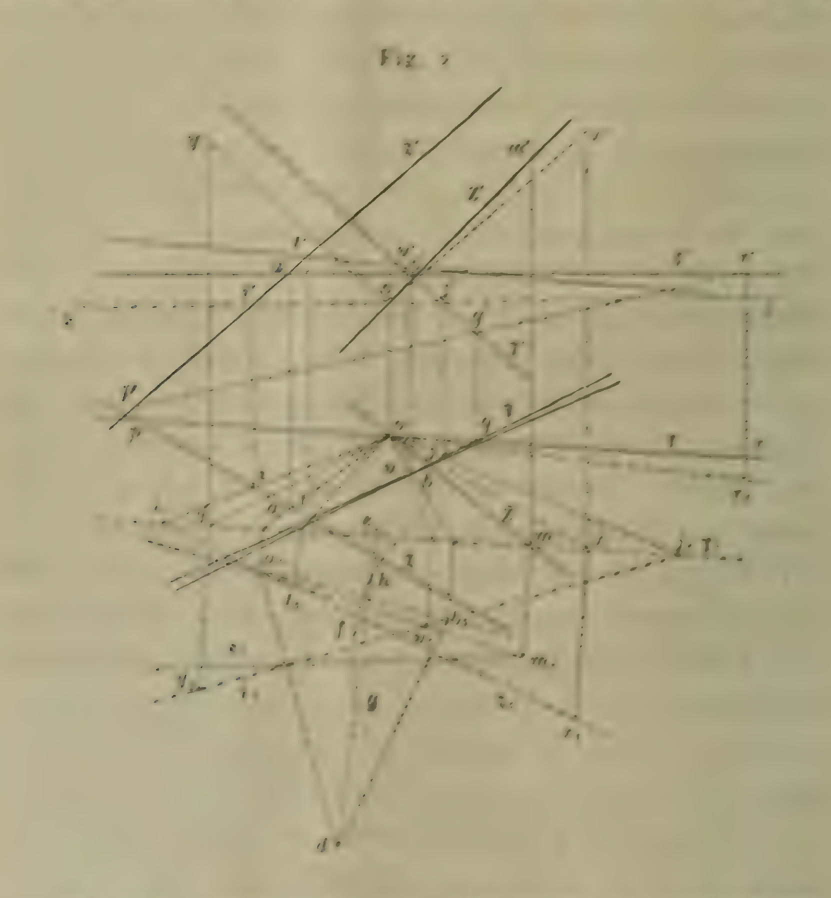
(T). Puis du point o comme point de vue faisons une perspective sur le plan (Π). Les perspectives des droites telles que Δ enveloppent une conique Γ, qui résulte de la section par le plan (Π) du cône de sommet o, circonscrit à (Σ). Cette conique Γ est d'ailleurs tangente aux perspectives (X_1) et (Y_1) des droites (X) et (Y); elle est pareillement tangente à la perspective de la droite (T), laquelle est rejetée à l'infini, d'après l'hypothèse faite sur le choix du plan (Π). De cette dernière remarque il résulte que la conique Γ est une parabole. Cette parabole est complètement déterminée par les conditions d'être tangente aux droites (X_1), (Y_1) et aux perspectives de la droite Δ prise dans deux positions particulières. Mais les droites cherchées, devant rencontrer à la fois (X), (Y), (Z) et (T), ont pour perspectives les tangentes menées à la parabole Γ par le point m d'intersection de la droite (Z) avec le plan (Π). Le problème se résoudra donc en menant du point m des tangentes à la parabole Γ, ce qui se fera à l'aide d'une construction indiquée plus haut.

On pourra aussi prendre l'intersection de (T) avec la droite joignant les points de rencontre du plan o(T) avec (X) et (Y). On aura ainsi le point de contact du plan o(T) avec la quadrique (Σ). La droite joignant le point o au point ainsi obtenu rencontrera le plan (Π) à l'infini au point de contact de la parabole Γ avec la droite de l'infini, c'est-à-dire sera parallèle à l'axe de cette parabole. Il suffira alors de construire la perspective d'une seule droite Δ, et il restera à mener par le point m des tangentes à une parabole dont on connaît trois tangentes et la direction de l'axe, problème dont la solution a été exposée tout à l'heure.

On simplifiera pratiquement l'épure, en prenant le

plan (II) parallèle à l'un des plans projetants de la droite (T), et le point de vue *o* à l'intersection de ce plan projetant avec la droite (Z). Nous allons du reste indiquer brièvement le détail des opérations graphiques. Soient respectivement X et X', Y et Y', Z et Z', T et T' les projections horizontales et verticales des quatre droites données (*fig.* 2). Prenons pour point de vue de la perspective le point (*o*, *o'*) d'intersection de la droite (Z, Z')

Fig. 2



avec le plan projetant horizontalement la droite (T, T'), et pour plan du tableau un plan parallèle au précédent, ayant par conséquent sa trace horizontale T_1 parallèle à T. Supposons un instant la perspective obtenue : pour

exécuter les constructions voulues dans le plan du tableau, nous rendrons ce plan horizontal en le faisant tourner autour de celle de ses horizontales qui est au niveau du point (o, o').

Cherchons les perspectives des droites (X, X') et (Y, Y'). Le plan horizontal passant par (o, o'), et représenté par sa trace verticale kl, coupe (X, X') au point (i, i'), dont la perspective i_1 est à la rencontre de T_1 et de oi. Menons par (o, o') une parallèle à (X, X'), qui coupe le plan vertical T_1 au point (x, x') : ce point (x, x') donne par rabattement un second point x_1 de la perspective X_1 de la droite (X, X'); on peut par suite tracer X_1. On obtient de même en rabattement la perspective Y_1 de la droite (Y, Y'), en joignant la perspective j_1 du point (j, j') à l'intersection y_1 du plan du tableau avec la parallèle $(oy, o'y')$ à (Y, Y'). Les droites X_1 et Y_1 sont deux tangentes de la parabole Γ. Pour en avoir une troisième, faisons la perspective de la droite qui est située dans le plan projetant verticalement (T, T') et s'appuie à la fois sur (X, X') et (Y, Y'). Le plan projetant verticalement (T, T') coupe (X, X') en (a, a') et (Y, Y') en (b, b'). Les perspectives de ces deux points sont rabattues respectivement en a_1 sur X_1 et en b_1 sur Y_1. La droite $a_1 b_1$ est une troisième tangente de la parabole Γ.

Pour avoir la direction de l'axe de cette parabole, prenons les points (p, p') et (q, q') d'intersection du plan vertical passant par (T, T') avec les droites (X, X') et (Y, Y'). La droite $(pq, p'q')$ coupe (T, T') en un point (r, r') : la droite $(or, o'r')$ est parallèle à l'axe de la parabole Γ. Rendons horizontal le plan vertical T, par une rotation autour de son horizontale passant par (o, o') : le point (r, r') se rabat en r_1, et la droite or_1 est parallèle à l'axe de la parabole Γ, lorsque le plan du tableau

qui contient cette courbe est rendu horizontal. Le rabattement du point m_1, où la droite (Z, Z') perce le plan du tableau, s'obtient d'ailleurs immédiatement.

On est ainsi conduit à mener par le point m_1 des tangentes à une parabole dont on connaît trois tangentes et la direction de l'axe. Pour cela ([1]), des points a_1 et b_1 on abaisse respectivement sur Y_1 et X_1 des perpendiculaires qui vont se couper en un point d. La droite de perpendiculaire à or_1 est la directrice de la parabole. Le foyer est à l'intersection des droites symétriques de de par rapport à X_1 et à Y_1. Du point m_1 comme centre décrivons une circonférence passant par le point f et rencontrant de en g et h. Les droites $m_1 s_1$ et $m_1 t_1$, respectivement perpendiculaires à fg et à fh, sont les tangentes à la parabole Γ qui passent par m_1. Soient t_1 et u_1 les points où l'une de ces tangentes coupe respectivement X_1 et Y_1. Les droites joignant le point o aux projections de t_1 et de u_1 sur la droite T_1 rencontrent respectivement X et Y en t et u. La droite tu est la projection horizontale d'une des droites cherchées : on en obtient immédiatement la projection verticale $t'u'$. Les projections horizontale et verticale de la seconde droite cherchée se déduiraient de la même manière de la seconde tangente $m_1 s_1$ menée de m_1 à la parabole Γ.

Remarque. — L'épure précédente peut être faite de vingt-quatre manières : on peut en effet prendre le point de vue sur l'une quelconque des quatre droites données, et, une fois le point de vue choisi sur l'une d'elles, on peut prendre le plan du tableau parallèle au plan projetant horizontalement ou au plan projetant ver-

---

([1]) Nous ne faisons qu'appliquer la construction exposée en détail au commencement de cette Note.

ticalement l'une des trois autres, ce qui donne six orientations différentes pour le plan du tableau.

II. *Construire une droite rencontrant trois droites données et parallèle à un plan donné.*

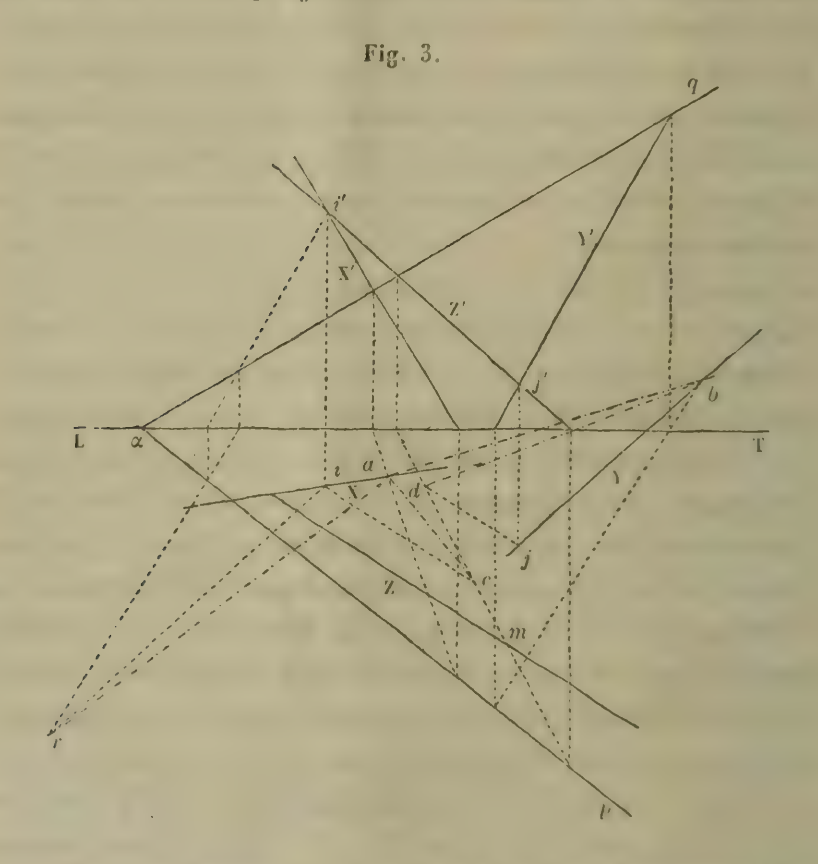
Ce problème peut, en quelque sorte, être considéré comme un cas particulier du précédent, la droite cherchée devant, au point de vue de la Géométrie projective, rencontrer, outre les trois droites données, une quatrième droite située à l'infini dans le plan donné; aussi est-il facile de déduire la solution de ce nouveau problème de celle du précédent.

Soient (X), (Y), (Z) les trois droites données et (P) le plan donné. Le point de vue *o* étant pris sur l'une des droites, sur (Z) par exemple, il est clair que l'on ramènera les conditions du problème à celles du précédent en choisissant pour plan (Π), sur lequel on fait la perspective, un plan parallèle au plan (P) ou, plus simplement encore, le plan (P) lui-même. Rien n'empêchera d'ailleurs de supposer le point *o* à l'infini sur (Z), et de remplacer, par conséquent, la perspective sur le plan (P) par une projection oblique faite sur le même plan parallèlement à (Z). Dans tous les cas, et de quelque manière que soit choisi le point de vue *o*, à distance finie ou à l'infini, on projettera de ce point sur le plan (P) les droites (X) et (Y), et l'on joindra par une droite Δ les points d'intersection de (X) et de (Y) avec le plan (P). On aura ainsi trois tangentes de la parabole Γ, à laquelle il s'agira de mener des tangentes par la trace *m* de la droite (Z) sur le plan (P). On complétera la détermination de cette parabole en déterminant la direction de son axe, lequel est parallèle à l'axe du paraboloïde hyperbolique engendré par la droite Δ,

c'est-à-dire à l'intersection du plan (P) avec un plan parallèle aux deux droites (X) et (Y). On sera ainsi ramené au problème résolu au début de cette Note.

Indiquons maintenant brièvement le détail des constructions. Soient (*fig.* 3), sur deux plans de projection se coupant suivant la ligne de terre LT, X et X′, Y et Y′, Z et Z′ les projections horizontale et verticale des

Fig. 3.



trois droites données, αp et αq les traces horizontale et verticale du plan (P) donné. Il est clair que la construction à effectuer dans le plan (P), à laquelle nous ramenons le problème, peut être remplacée par la même construction exécutée sur les projections horizontales (ou verticales) des éléments sur lesquels on devrait opérer dans le plan (P) lui-même : cela tient à ce que le

problème à résoudre, relativement à la parabole Γ située dans le plan (P), est projectif et à ce que, par une projection cylindrique, la parabole Γ est changée en une autre parabole (γ) dont l'axe est parallèle à la projection de l'axe de la première. Cette remarque apporte de nouvelles simplifications dans la solution. Prenons, suivant les procédés connus, les projections horizontales a et b des traces des droites (X, X') et (Y, Y') sur le plan $p\alpha q$. La droite ab est tangente à la parabole (γ). Projetons les droites (X, X') et (Y, Y') sur le plan $p\alpha q$ parallèlement à (Z, Z'). Pour projeter (X, X'), par exemple, il suffit d'en projeter l'un des points, et de préférence, pour simplifier, le point (i, i') d'intersection de cette droite avec le plan projetant verticalement (Z, Z'). On obtient en c la projection horizontale de la projection oblique sur le plan (P) du point (i, i') : ac est une seconde tangente de la parabole (γ). En opérant de même sur le point (j, j') d'intersection de la droite (Y, Y') avec le plan projetant verticalement (Z, Z'), on obtient le point d : bd est une troisième tangente de la parabole (γ). Pour avoir la direction de l'axe de cette parabole, menons par le point (i, i') une parallèle à la droite (Y, Y'), prenons en r la projection horizontale de l'intersection avec le plan $p\alpha q$ de la droite ainsi tracée : ar, étant la projection horizontale de l'intersection du plan $p\alpha q$ avec un plan mené par (X, X') parallèlement à (Y, Y'), est parallèle à l'axe de la parabole (γ). Il n'y a maintenant qu'à mener à la parabole (γ), complètement déterminée par les éléments obtenus, des tangentes par le point m, projection horizontale de la trace de la droite (Z, Z') sur le plan $p\alpha q$. Ce problème ayant déjà été résolu plus haut, nous supprimons sur l'épure les constructions qui s'y rapportent, pour ne pas compliquer inutilement

la figure. Soient t et u [1] les points où l'une des tangentes menées du point m à (γ) coupe respectivement ac et bd. Pour avoir la droite qui, s'appuyant sur (X, X') et (Y, Y'), se projette sur le plan $p\alpha q$, parallèlement à (Z, Z'), suivant une droite projetée horizontalement en mt, il suffira de faire, en partant des points t et u, la construction inverse de celle qui nous a permis d'obtenir les points c et d, en partant des points (i, i') et (j, j'). La droite joignant les points de (X, X') et (Y, Y') ainsi trouvés sera l'une des droites cherchées. On aura la seconde par une construction toute semblable.

Remarques. — 1° La construction qui vient d'être exposée peut se faire de six manières, puisque l'on peut faire la projection oblique sur le plan $p\alpha q$ parallèlement à l'une quelconque des trois droites données (X, X'), (Y, Y'), (Z, Z'), et que l'on peut ensuite projeter orthogonalement la figure obtenue sur l'un quelconque des deux plans de projection.

2° Au lieu de projeter la figure située dans le plan $p\alpha q$ sur l'un des plans de projection, on pourrait procéder en rabattant le plan $p\alpha q$ sur l'un de ces deux plans; mais on arriverait ainsi à des constructions un peu moins simples.

Les deux problèmes dont la solution vient d'être donnée permettent de résoudre simplement un assez grand nombre de questions relatives aux surfaces gauches du second degré. Nous allons les passer en revue, en indiquant, brièvement pour chacune d'elles, comment on en ramène la solution à celle de l'un des problèmes précédents.

---

[1] Cette partie des constructions n'est pas représentée sur la figure.

III. *Trouver les points d'intersection d'une droite avec une surface gauche du second degré, dont on donne trois génératrices rectilignes d'un même système.*

Soit à chercher l'intersection de la droite (D) avec la quadrique gauche ayant pour génératrices rectilignes d'un même système les trois droites (A), (B), (C). On construira les deux droites qui rencontrent à la fois les quatre droites (A), (B), (C), (D) (problème I). Les points d'intersection des deux droites obtenues avec (D) seront les points cherchés.

IV. *Mener, par une droite donnée* (D), *un plan tangent à une surface gauche du second degré, dont on donne trois génératrices rectilignes d'un même système.*

Ce problème, comme on le sait, se ramène au précédent. On prend les points de rencontre de la droite (D) avec la surface (problème III); puis on construit les deux génératrices rectilignes de cette surface qui passent par chacun de ces deux points. Les quatre génératrices rectilignes, ainsi obtenues, appartiennent par couples à des systèmes différents, et les génératrices d'un même couple déterminent un plan, qui est un des deux plans tangents demandés.

V. *Construire, en un point donné par une de ses projections, un plan tangent à une surface gauche du second degré, déterminée par trois génératrices rectilignes d'un même système.*

Supposons, par exemple, que le point soit donné par sa projection horizontale. Ce point doit se trouver à la rencontre d'une verticale déterminée avec la surface. Le

problème à résoudre, pour avoir la projection verticale du point, est donc un cas particulier du problème III. Le plan tangent se construit ensuite suivant les méthodes bien connues.

VI. *Mener, parallèlement à un plan donné, un plan tangent à une surface gauche du second degré, déterminée par trois génératrices rectilignes d'un même système.*

La génératrice du second système, située dans le plan tangent cherché, doit s'appuyer sur les trois génératrices rectilignes données et être parallèle au plan donné. On la déterminera par la méthode qui résoud le problème II. On obtiendra ensuite par les procédés connus le point de contact de chacun des deux plans tangents trouvés.

VII. *Trouver les points d'intersection d'une droite et d'un paraboloïde hyperbolique engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné.*

Soit à chercher l'intersection de la droite (D) avec le paraboloïde hyperbolique engendré par une droite mobile, qui s'appuie sur deux droites fixes (A) et (B), en restant parallèle à un plan (P). On construira les deux droites parallèles au plan (P), qui rencontrent les trois droites (A), (B) et (D) (problème II). Les points d'intersection des deux droites obtenues avec (D) seront les points cherchés.

VIII. *Mener, par une droite donnée* (D), *un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique, engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné.*

On sait que ce problème se résoud au moyen du précédent. On prend les deux points d'intersection de la droite (D) avec le paraboloïde (problème VII); puis on construit les deux génératrices rectilignes de la surface qui passent par chacun de ces deux points. Les quatre génératrices rectilignes ainsi obtenues appartiennent par couples à des systèmes différents; chacun de ces couples de génératrices détermine un plan qui est un des plans tangents cherchés.

IX. *Construire, en un point donné par une de ses projections, un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique, engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné.*

Soit donnée, par exemple, la projection horizontale d'un point de la surface. Ce point doit se trouver à l'intersection de la surface avec une verticale déterminée. On est ainsi ramené à un cas particulier du problème VII. Ayant obtenu les points cherchés, on construira, d'après les procédés connus, le plan tangent au paraboloïde en chacun de ces points.

Remarque. — Les constructions nécessaires pour résoudre les problèmes VII, VIII et IX, déjà simples dans le cas le plus général, se simplifient encore lorsque le plan directeur du paraboloïde coïncide avec un des plans de projection.

Application à la construction des normales à certaines surfaces. — Les normales aux surfaces trajectoires des divers points d'un solide, dont le déplacement dépend de deux paramètres variables, possèdent, comme on le sait, pour chaque position particulière du solide,

la belle propriété de rencontrer deux mêmes droites (MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique,* 2e édition, p. 277). Connaissant, pour une position quelconque du solide, les normales à quatre des surfaces trajectoires, il sera facile, au moyen de la solution donnée plus haut du problème I, de construire les deux droites rencontrant ces quatre normales et d'en déduire la normale à l'une quelconque des surfaces trajectoires du solide.

SUR LES POINTS D'INTERSECTION D'UNE CONIQUE FIXE AVEC UNE CONIQUE MOBILE PASSANT PAR DEUX POINTS FIXES;

PAR M. P. APPELL.

Nous nous proposons d'appliquer à un cas élémentaire les méthodes indiquées par Clebsch ([1]) pour l'étude des groupes de points sur une courbe unicursale.

Soit une conique fixe S supposée réelle et soient

$$(1)\qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{g(t)}{\varphi(t)}$$

les expressions des coordonnées d'un point de cette conique en fonction rationnelle d'un paramètre t, $f(t)$, $g(t)$ et $\varphi(t)$ désignant des trinômes du second degré en t. Pour préciser, on peut supposer que le paramètre t est le coefficient angulaire de la droite joignant le point (x, y) de la conique S à un point réel fixe sur cette co-

---

([1]) Voir *Leçons sur la Géométrie*, par CLEBSCH; recueillies et complétées par LINDEMANN, traduites par BENOIST, tome III. Gauthier-Villars, 1883.

nique : on voit alors qu'à chaque point (x, y) correspond une seule valeur de t, que si ce point est réel la valeur de t l'est aussi, et réciproquement.

Considérons maintenant deux points fixes P et Q réels ou imaginaires conjugués, non situés sur la conique S et définis par l'intersection d'une droite fixe

$$ux + vy + w = 0,$$

avec une conique fixe ayant pour équation

$$F(x, y) = 0.$$

L'équation générale des coniques Σ passant par les deux points fixes P et Q est

$$(2) \qquad F(x, y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu) = 0,$$

avec trois coefficients variables λ, μ, ν. Ces coniques variables Σ coupent la conique fixe S en quatre points parmi lesquels trois peuvent être choisis arbitrairement; le quatrième point d'intersection est alors déterminé et est unique. Appelons t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs du paramètre t correspondant à ces quatre points d'intersection : ces valeurs seront liées par une relation algébrique déterminant l'une d'elles dès que les trois autres seront connues. C'est cette relation que nous allons former.

Supposons d'abord que la droite PQ ne soit pas tangente à la conique fixe S : elle coupera cette conique en deux points, réels ou imaginaires, correspondant aux valeurs $t = a$ et $t = b$ du paramètre t, fournies par l'équation

$$ux + vy + w = 0,$$

dans laquelle on remplacerait x et y par les expressions (1) : nous appellerons $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ les coordonnées de ces points A et B. Pour trouver les valeurs de t correspondant aux quatre points d'intersection de la conique

variable Σ avec la conique fixe S, il faut substituer dans l'équation (2) de Σ les expressions (1) de x et y

$$(1) \qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{g(t)}{\varphi(t)};$$

l'équation (2) devient alors, après qu'on a réduit tous ses termes au dénominateur commun $\varphi^2(t)$, une équation du quatrième degré admettant les racines cherchées t_1, t_2, t_3, t_4. On aura donc, en décomposant le numérateur de cette équation en facteurs du premier degré, l'identité

$$F(x,y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu) = K\frac{(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{\varphi^2(t)},$$

où K est une constante qui ne dépend pas de t, mais qui dépend de λ, μ, ν. Si, dans cette identité, on fait $t = a$, les quantités x et y deviennent les coordonnées x_1 et y_1 du point A, $(ux + vg + w)$ s'annule, et l'on a

$$F(x_1,y_1)\varphi^2(a) = K(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)(t_4 - a);$$

de même, en faisant $t = b$, on a

$$F(x_2,y_2)\varphi^2(b) = K(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)(t_4 - b).$$

Divisant ces deux équations membre à membre pour éliminer K, on a la relation cherchée

$$(3) \qquad \frac{t_1 - a}{t_1 - b}\,\frac{t_2 - a}{t_2 - b}\,\frac{t_3 - a}{t_3 - b}\,\frac{t_4 - a}{t_4 - b} = C,$$

où le second membre C est une constante ayant pour valeur

$$(4) \qquad C = \frac{F(x_1,y_1)\varphi^2(a)}{F(x_2,y_2)\varphi^2(b)}.$$

On voit, comme nous l'avions dit *a priori*, que, t_1, t_2, t_3 étant choisis arbitrairement, cette relation (3) donne une seule valeur pour t_4. Examinons maintenant

les divers cas qui peuvent se présenter et tirons quelques conséquences de cette relation (3).

1° *Les points* A *et* B *sont réels.* — Dans ce cas, la constante C est réelle; elle est positive si $F(x_1, y_1)$ et $F(x_2, y_2)$ sont de mêmes signes, c'est-à-dire si les points A et B sont tous deux à l'intérieur ou tous deux à l'extérieur de la conique $F(x, y) = 0$; elle est négative dans le cas contraire. Nous simplifierons la forme de la relation (3) en faisant un changement de paramètre et posant

$$\frac{t-a}{t-b} = \theta,$$

où θ désigne une nouvelle variable destinée à remplacer t. A chaque valeur de θ répondent une valeur de t et, par suite, un point de la conique S, et réciproquement; si θ est réel, t l'est aussi, et réciproquement. Si l'on appelle θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 les quatre valeurs de θ correspondant aux quatre points d'intersection de Σ avec S, on voit que la relation (3) prendra la forme simple

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = C. \tag{5}$$

Coniques Σ *surosculatrices à* S. — Pour qu'une conique Σ soit surosculatrice à S, il faut et il suffit que les quatre points d'intersection soient confondus. Appelant θ la valeur du paramètre qui correspond au point de surosculation, on aura donc, d'après (5),

$$\theta^4 = C; \tag{6}$$

cette équation a deux racines réelles ou n'en a aucune suivant que C est positif ou négatif. Dans la première hypothèse, il existe deux coniques Σ surosculatrices réelles; dans la seconde, il n'en existe pas. Les quatre points de surosculation réels ou imaginaires ne sont

jamais sur une conique Σ, car le produit des quatre racines de l'équation (6) est égal à $-C$.

Mener par un point θ_1 *de la conique* S *des coniques* Σ *osculatrices à* S. — Soit θ la valeur du paramètre correspondant au point d'osculation, la conique Σ osculatrice au point θ coupera S au point donné θ_1 et en trois points confondus avec θ; on aura donc, d'après (5),

$$\theta_1 \theta^3 = C, \tag{7}$$

équation en θ qui a une seule racine réelle θ' et deux imaginaires θ'' et θ'''. On ne peut donc mener par un point θ_1 de S qu'une conique Σ réelle osculatrice à S. Le point θ_1 et les trois points d'osculation réels ou imaginaires θ', θ'', θ''' sont sur une conique Σ, car on a

$$\theta_1 \theta' \theta'' \theta''' = C.$$

2° *Les points* A *et* B *sont imaginaires conjugués.* — Alors les quantités $F(x_1, y_1)\varphi^2(a)$ et $F(x_2, y_2)\varphi^2(b)$ sont imaginaires conjuguées; leur quotient C est une constante imaginaire de module 1,

$$C = \cos\omega + i \sin\omega.$$

Les constantes a et b étant imaginaires conjuguées, on a

$$a = \alpha + i\beta, \qquad b = \alpha - i\beta.$$

Pour simplifier la relation (3) et n'y introduire que des éléments réels, posons

$$\frac{\alpha - t}{\beta} = \cot\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\omega}{8}\right).$$

τ étant un nouveau paramètre que nous substituons à t. A chaque valeur de τ répond une seule valeur de t, mais à une valeur de t répondent une infinité de valeurs

de τ différant les unes des autres par des multiples de 2π : en outre, si τ est réel, t l'est aussi, et réciproquement. Donc, à chaque valeur de τ correspond un seul point de la conique S; mais à un point de la conique correspondent une infinité de valeurs de τ différant les unes des autres par des multiples de 2π. Si nous appelons τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 des valeurs de τ correspondant aux quatre points t_1, t_2, t_3, t_4 d'intersection de la conique S avec une conique Σ, la relation (3) prendra la forme

$$\cos(\tau_1 + t_2 + \tau_3 + \tau_4 + \omega) \\ + i \sin(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \omega) = \cos\omega + i\sin\omega ;$$

d'où

(8) $$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 2k\pi,$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Coniques Σ surosculatrices. — En appelant τ le paramètre du point de surosculation, on devra avoir

$$4\tau = 2k\pi ;$$

d'où, pour τ_1, quatre valeurs obtenues en faisant successivement $k = 0, 1, 2, 3$,

$$\tau' = 0, \qquad \tau'' = \frac{\pi}{2}, \qquad \tau''' = \pi, \qquad \tau^{\text{IV}} = \frac{3\pi}{2} ;$$

les autres déterminations de l'entier k donnent pour τ des valeurs qui diffèrent de l'une des quatre précédentes par des multiples de 2π et qui, par suite, ne fournissent pas de nouveaux points de la courbe. Il y a donc quatre coniques Σ surosculatrices réelles ; leurs points de contact ne sont jamais situés sur une conique Σ, car la somme $(\tau' + \tau'' + \tau''' + \tau^{\text{IV}})$ est un multiple *impair* de π.

Mener par un point τ_1 *de la conique* S *des coniques* Σ *osculatrices à* S. — Appelons τ le paramètre du point d'osculation, nous aurons

$$\tau_1 + 3\tau = 2k\pi,$$

d'où, en faisant $k = 0, 1, 2$, trois valeurs pour τ :

$$\tau' = -\frac{\tau_1}{3}, \qquad \tau'' = \frac{2\pi}{3} - \frac{\tau_1}{3}, \qquad \tau''' = \frac{4\pi}{3} - \frac{\tau_1}{3}.$$

Il y a donc trois coniques Σ osculatrices réelles; les points de contact et le point τ_1 sont sur une conique Σ; car on a

$$\tau' + \tau'' + \tau''' + \tau_1 = 2\pi.$$

3° Nous avons supposé, pour établir les résultats précédents, que la droite PQ n'est pas tangente à la conique S. Lorsque cette droite est tangente à S, les deux points A et B sont confondus, a devient égal à b, et l'équation

$$ux + vy + w = 0,$$

où l'on remplace x et y par leurs expressions (1) en fonction de t, admet la *racine double* $t = a$ qui annule aussi la dérivée

$$ux'_t + vy'_t.$$

Revenons alors à l'identité

$$F(x, y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu) = K\frac{(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{\varphi^2(t)},$$

et prenons les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à t. Nous aurons la nouvelle identité

$$\frac{F'_x x'_t + F'_y y'_t + (ux'_t + vy'_t)(\lambda x + \mu y + \nu) + (ux + vy + w)(\lambda x'_t + \mu y'_t)}{F(x, y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu)}$$
$$= \frac{1}{t - t_1} + \frac{1}{t - t_2} + \frac{1}{t - t_3} + \frac{1}{t - t_4} - 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)};$$

faisons dans cette identité $t = a$ et rappelons-nous que $(ux + vy + w)$ et $(ux'_t + vy'_s)$ s'annulent pour $t = a$, nous aurons la relation cherchée

$$(9) \qquad \frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + \frac{1}{a - t_3} + \frac{1}{a - t_4} = h,$$

h désignant une constante dont il est inutile d'écrire l'expression. Si, pour simplifier, on change de paramètre en posant

$$\frac{1}{a - t} = s + \frac{h}{4},$$

s désignant un nouveau paramètre qui prend les valeurs s_1, s_2, s_3, s_4 aux quatre points d'intersection, la relation (9) devient

$$(10) \qquad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0.$$

Il n'y a plus alors qu'une conique Σ surosculatrice; son point de contact est $s = 0$. Par un point s_1 de S on ne peut plus mener qu'une conique Σ osculatrice à S; le point de contact est $-\frac{s_1}{3}$.

Exercices. — I. En un point M_1 de la conique S on mène une conique Σ osculatrice coupant la conique S en un autre point M_2; en M_2 on mène de nouveau une conique Σ osculatrice qui coupe S en un autre point M_3; ... et ainsi de suite. Calculer le paramètre du point M_n ainsi obtenu en fonction de paramètre du point M_1, en se plaçant successivement dans les trois cas examinés plus haut. Chercher si M_n peut coïncider avec M_1. Chercher si M_n tend vers une position limite quand n augmente indéfiniment.

II. Appliquer la méthode générale aux cas particu-

liers suivants, auxquels on pourrait toujours ramener les trois cas précédents par une projection conique :

1° S est une hyperbole $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ et les coniques Σ sont des cercles

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

ou des hyperboles équilatères asymptotes aux axes

$$xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0;$$

2° La conique S est une ellipse et les coniques Σ des cercles;

3° La conique S est une parabole et les coniques Σ des cercles.

III. Former les relations qui lient les quatre valeurs du paramètre t correspondant aux points d'intersection d'une conique fixe S avec une conique variable T passant par trois points fixes ; trouver ensuite les coniques T bitangentes à la conique S.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UNE FAMILLE DE CONIQUES; 

Par M. Charles FABRY,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

On sait que la perspective d'une cubique gauche sur un plan quelconque, en prenant pour point de vue un point de la courbe, est une conique. Si l'on prend pour point de vue successivement tous les points de la courbe, le plan restant fixe, on aura une famille de co-

niques ; c'est cette famille de coniques que je me propose d'étudier.

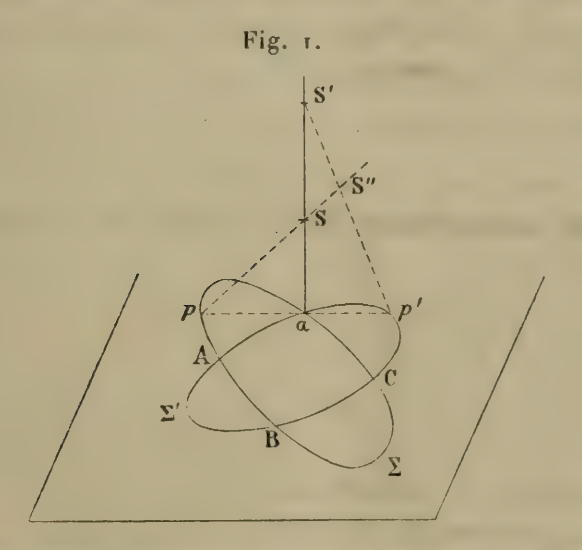
I.

1. Soient

P le plan fixe ;
Σ, Σ' deux coniques quelconques données dans ce plan ;
A, B, C trois de leurs points d'intersection ;
α le quatrième.

Menons par α une droite non située dans le plan P, et prenons sur cette droite deux points S et S'. Les cônes, ayant respectivement pour sommets S et S' et pour directrices Σ et Σ', ont une génératrice commune SS' ; la courbe commune à ces deux cônes se compose donc de cette droite et d'une cubique gauche qui passe par les points A, B, C, ainsi que par les points S et S'. Les deux coniques Σ et Σ' sont donc deux perspectives de cette cubique gauche. Nous allons chercher à définir

Fig. 1.



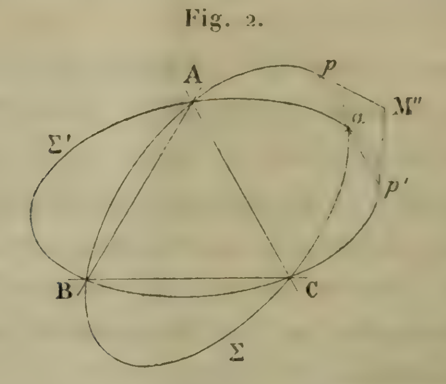
toutes les autres perspectives de la courbe. Cherchons un autre point de la cubique. Pour cela, je coupe par un plan passant par SS' (*fig.* 1). Ce plan coupe Σ

en p et Σ' en p'. Les droites pS, $p'S'$ se coupent en un point S'' qui est sur la cubique. La perspective de la cubique par rapport à ce point est une conique Σ'' passant par les cinq points A, B, C, p et p'.

Donc notre famille de coniques peut être définie de la manière suivante :

On donne un triangle ABC (*fig.* 2) *et deux coniques*

Fig. 2.



Σ *et* Σ' *circonscrites à ce triangle. Ces deux coniques se coupent en un quatrième point* α. *Par ce point on mène une sécante variable* $pp'\alpha$, *et l'on fait passer par les cinq points* A, B, C, p, p' *une conique.*

Deux coniques de la famille n'auront qu'un point commun autre que A, B, C.

Les coniques Σ et Σ' sont deux coniques quelconques de la famille. Donc :

Théorème I. — *Si l'on prend trois quelconques des coniques définies comme ci-dessus, les trois points d'intersection* (*autres que* A, B, C) *de ces coniques, prises deux à deux, sont en ligne droite.*

2. La conique Σ' doit passer par le point où la tangente à la cubique en S'' rencontre le plan P, et ce point est celui où la conique Σ'' touche l'enveloppe de nos co-

niques. Or ce point est à l'intersection de la tangente à Σ en p et de la tangente à Σ' en p'. Donc :

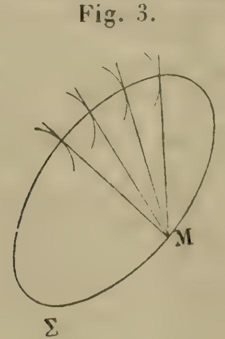
Théorème II. — *Si* M'' *est l'intersection des tangentes à* Σ *et* Σ' *en* p *et* p', *la conique passant par* A, B, C, p, p' *passe en* M'', *et ce dernier point est celui où cette conique rencontre la conique infiniment voisine de la famille.*

La conique Σ passe au point où la tangente en S à la cubique perce le plan. Or ce point est à l'intersection de la conique Σ avec la tangente à Σ' au point α. On a donc le théorème suivant :

Théorème III. — Σ *étant une des coniques de la famille, les tangentes aux autres coniques de la famille au point où elles rencontrent la conique* Σ *passent par un même point* M, *qui est le point où la conique* Σ *touche l'enveloppe.*

De ce théorème résulte que, par aucun point du plan

Fig. 3.



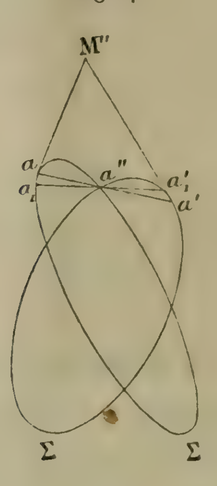
on ne peut faire passer plus de deux coniques de la famille.

3. Les théorèmes II et III sont des conséquences immédiates du théorème I.

Soient en effet Σ, Σ', Σ'' trois coniques de la famille : Σ' et Σ'' se coupent en a, Σ et Σ'' en a', Σ et Σ' en a''. On

sait que les points a, a', a'' sont en ligne droite. Soit Σ''_1 la conique infiniment voisine de Σ''; elle rencontre Σ en a'_1, Σ' en a_1 et Σ'' en M''. Les droites aa_1 et $a'a'_1$ sont

Fig. 4.



les tangentes en a et a' aux coniques Σ' et Σ. Or les points M''aa_1 et les points M''$a'a'_1$ sont en ligne droite, ce qui démontre le théorème II.

Le théorème III n'est qu'une autre manière d'énoncer le théorème II.

Ces deux théorèmes peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Si deux coniques de la famille Σ et Σ' se coupent en α, la tangente à l'une d'elles en α passe par le point où l'autre touche l'enveloppe.

4. *Enveloppe de ces coniques.* — L'enveloppe de nos coniques est le lieu des traces des tangentes à leur cubique gauche sur le plan P, c'est-à-dire l'intersection du plan P et de la surface développable qui a la cubique gauche pour arête de rebroussement. L'enveloppe de nos coniques est donc une courbe du quatrième degré qui a trois points de rebroussement en A, B, C. Les tangentes

en ces points sont les traces sur le plan P des plans osculateurs à la cubique en A, B, C. Or ces plans osculateurs se coupent en un point du plan P. Donc :

Théorème IV. — *L'enveloppe de nos coniques (ou lieu des points tels que* M″) *est une courbe du quatrième degré, qui a pour points de rebroussement les points* A, B, C, *et les tangentes en ces points sont concourantes.*

II.

ÉTUDE DES CONIQUES, DROITES ET POINTS CORRESPONDANTS PAR RAPPORT A UN TRIANGLE.

5. Soient A, B, C un triangle, S une conique circon-

Fig. 5.

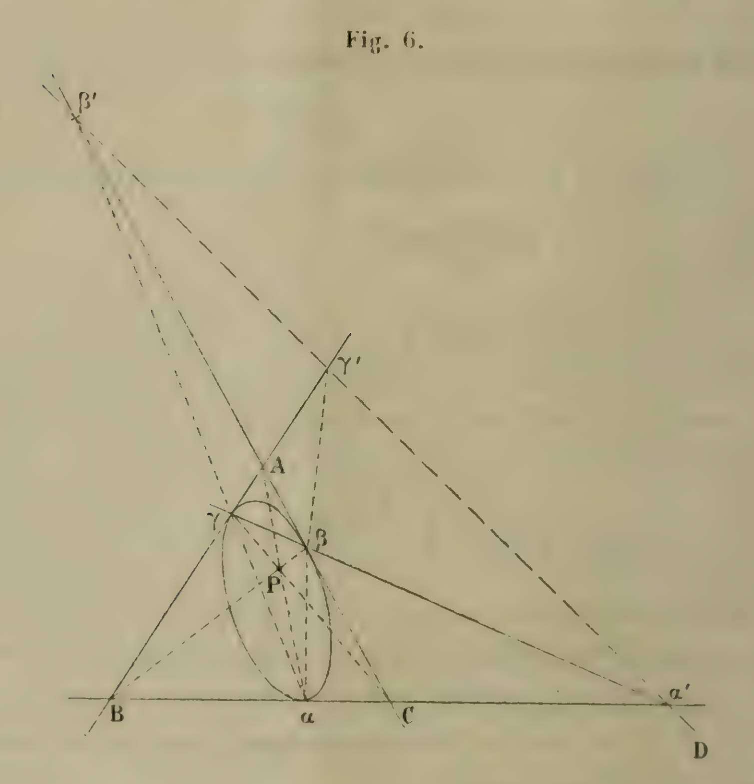
scrite. Nous allons définir cette conique d'une manière

symétrique par rapport aux éléments du triangle, au moyen d'une droite ou d'un point :

1° Soient $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ les tangentes en A, B, C à la conique S. Les points α, β, γ sont sur une droite D. A chaque conique S correspond une droite telle que D, et à chaque droite correspond une conique. La droite D peut donc servir à *définir* la conique.

2° Les tangentes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ forment un triangle *abc*, et les droites Aa, Bb, Cc concourent en un point P.

Fig. 6.



A chaque conique correspond un point P. Réciproquement, si P est donné, on en déduira les points α', β', γ'. Or les points α, β, γ sont les conjugués harmoniques des premiers par rapport à BC, AC, AB, et les points α, β, γ ainsi construits seront en ligne droite. On aura alors les tangentes à la conique en A, B, C, et par suite

la conique. Le point P peut donc aussi servir à définir la conique.

De même, si T est une conique inscrite au triangle, on pourra la définir par un point ou par une droite; la *fig.* 6 fait suffisamment comprendre de quelle manière.

6. Prenons le triangle ABC pour triangle de référence. On démontrera sans difficulté les résultats suivants :

Si un point P a pour coordonnées x, y, z, la droite correspondante D aura pour équation

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

la conique correspondante S

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0,$$

la conique inscrite correspondante T

$$\sqrt{\frac{X}{x}} + \sqrt{\frac{Y}{y}} + \sqrt{\frac{Z}{z}} = 0.$$

Si l'on se donne une courbe que décrit le point P, il est facile de trouver l'enveloppe de la droite et des deux coniques correspondantes ou réciproquement.

Le Tableau suivant donne quelques-uns des résultats que l'on obtient ainsi :

Courbe décrite par un point P.	Enveloppe de la droite correspondante D.	Enveloppe de la conique circonscrite S.	Enveloppe de la conique inscrite T.
Droite Δ : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$	Conique inscrite correspondante de Δ : $\sqrt{\frac{X}{a}}+\sqrt{\frac{Y}{b}}+\sqrt{\frac{Z}{c}}=0.$	Point correspondant de Δ : $\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c}.$	Courbe du troisième degré ayant pour point double le point correspondant de Δ, pour points d'inflexion les points communs au côté du triangle et à Δ, et pour tangente d'inflexion les côtés du triangle $\sqrt[3]{\frac{X}{a}}+\sqrt[3]{\frac{Y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{Z}{c}}=0.$
Conique circonscrite Σ : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$	Point correspondant de Σ : $\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c}.$	Courbe du quatrième degré ayant pour points de rebroussement les trois sommets du triangle, les tangentes en ces points concourant au point conjugué de Σ, et pour tangente double la droite conjuguée de Σ : $\sqrt{\frac{a}{X}}+\sqrt{\frac{b}{Y}}+\sqrt{\frac{c}{Z}}=0.$	Droite correspondante de Σ : $\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=0.$
Conique inscrite Θ : $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=0.$	Cubique, etc. : $\sqrt[3]{\frac{X}{a}}+\sqrt[3]{\frac{Y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{Z}{c}}=0.$	Droite correspondante de Θ : $\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=0.$	$\sqrt[4]{\frac{X}{a}}+\sqrt[4]{\frac{Y}{b}}+\sqrt[4]{\frac{Z}{c}}=0.$

Toutes les réciproques de ces théorèmes sont vraies; par exemple, si une conique circonscrite au triangle ABC passe par un point fixe, le point correspondant de cette conique décrit la droite correspondante du point fixe.

7. Nous avons rencontré dans ce qui précède une courbe du quatrième degré ayant trois rebroussements. Il est facile de démontrer que cette courbe est la plus générale de cette espèce, c'est-à-dire que toute courbe du quatrième degré, qui a pour points de rebroussement les trois sommets du triangle de référence, est représentée par une équation de la forme

$$\sqrt{\frac{a}{X}} + \sqrt{\frac{b}{Y}} + \sqrt{\frac{c}{Z}} = 0.$$

Il suffit, pour le démontrer, de partir de l'équation la plus générale des courbes du quatrième degré et d'exprimer qu'elle a les trois sommets du triangle pour points de rebroussement. On en conclut ce théorème :

Théorème V. — *Si une courbe du quatrième degré a trois points de rebroussement* A, B, C :

1° *Les tangentes en ces points concourent en un point* P;

2° *La courbe a une tangente double qui est la droite correspondant au point* P *par rapport au triangle* ABC.

On verra de même que toute courbe du troisième degré, qui a un point double (coordonnées a, b, c) et trois points d'inflexion situés respectivement sur les côtés du triangle, avec les côtés de ce triangle pour tangentes d'inflexion, a pour équation

$$\sqrt[3]{\frac{X}{a}} + \sqrt[3]{\frac{Y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{Z}{c}} = 0$$

ou

$$\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}\right)^3-27\frac{XYZ}{abc}=0.$$

On en conclut ce théorème :

Théorème VI. — *Si une courbe du troisième degré a un point double et trois points d'inflexion :*

1° *Les trois points d'inflexion sont en ligne droite ;*

2° *La droite qui joint ces points est la droite conjuguée du point double par rapport au triangle formé par les tangentes d'inflexion.*

Les théorèmes V et VI se déduisent l'un de l'autre par les polaires réciproques.

Théorème VII. — *Si deux coniques* S *et* S′ *circonscrites au triangle* ABC *ont pour points correspondants* P *et* P′, *le point d'intersection de ces deux coniques est le point correspondant à la droite* PP′.

Car toutes les coniques dont les points correspondants sont sur PP′ passent par un même point, qui est le point correspondant à PP′.

On démontrera de même :

Théorème VIII. — *Si deux coniques* T *et* T′ *inscrites au triangle* ABC *ont pour droites correspondantes* D *et* D′, *la tangente commune à ces coniques est la droite correspondant au point commun à* D *et* D′.

Supposons qu'un point décrive une courbe P. La conique circonscrite correspondant à ce point enveloppera une courbe C. Le point où chacune de ces coniques rencontre la conique infiniment voisine est le point conjugué d'une tangente à la courbe P. De là ce théorème :

Théorème IX. — *Supposons qu'un point décrive une*

courbe P, *la conique circonscrite correspondante de ce point enveloppera une courbe* C. *Si une droite reste tangente à la courbe* P, *son point conjugué décrira* C.

On démontrera de même le théorème suivant :

Théorème X. — *Supposons qu'une droite reste tangente à une courbe* D. *La conique inscrite correspondante enveloppera une courbe* T. *Si un point décrit* T, *sa droite correspondante décrira* D.

Les réciproques sont aussi vraies.

Par exemple, si une conique inscrite reste tangente à la conique circonscrite $\frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$, sa droite conjuguée enveloppera la quartique $\sqrt{\frac{a}{X}} + \sqrt{\frac{b}{Y}} + \sqrt{\frac{c}{Z}} = 0$.

Une conique circonscrite au triangle ABC et la conique inscrite correspondante sont bitangentes, et la corde des contacts est la droite correspondant à ces coniques. En effet, les équations des deux coniques sont :

$$aYZ + bZX + cXY = 0$$

et

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 2\frac{YZ}{bc} - 2\frac{ZX}{ac} - 2\frac{XY}{ab} = 0,$$

et cette dernière équation peut s'écrire

$$\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c}\right)^2 - \frac{4}{abc}(aYZ + bZX + cXY) = 0,$$

ce qui démontre le théorème. Les points de contact des deux coniques sont imaginaires. On démontre sans difficulté que, inversement, si deux coniques, l'une inscrite, l'autre circonscrite au triangle ABC, sont bitangentes, elles sont correspondantes et la corde des contacts est la droite correspondante des deux coniques.

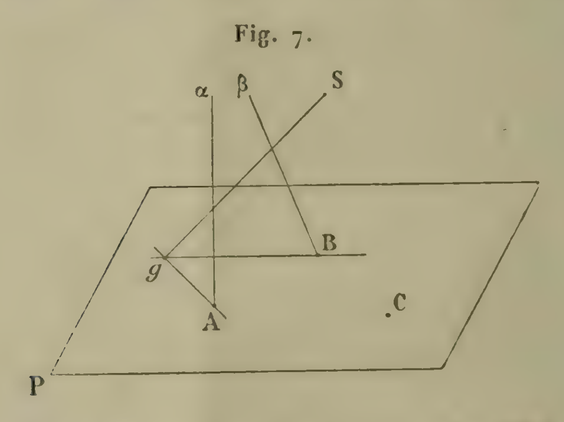
III.

9. Revenons à la famille de coniques obtenue en prenant les perspectives d'une même courbe gauche du troisième degré par rapport aux différents points de la courbe.

Toutes ces coniques sont, comme nous l'avons vu, circonscrites à un même triangle ABC. Cherchons le lieu du pôle de l'un des côtés du triangle par rapport à ces coniques.

Soient A, B, C les trois points où la cubique rencontre le plan P; $A\alpha$, $B\beta$ les tangentes en A et B à la cubique. Soit S un autre point de la cubique. La perspective de la courbe par rapport à ce point sera une conique passant en A, B, C, et dont les tangentes en A

Fig. 7.



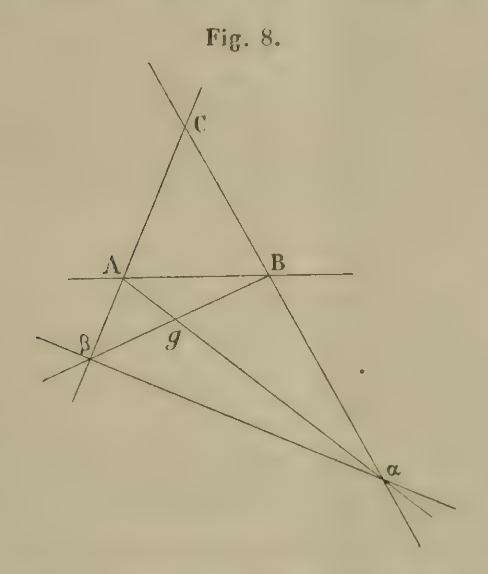
et B seront les perspectives des droites $A\alpha$, $B\beta$. Le pôle g de AB par rapport à cette conique sera donc la trace sur le plan P de la droite passant par S et rencontrant les deux droites $A\alpha$, $B\beta$. Or, si une droite rencontre une cubique gauche et deux de ses tangentes, elle engendre un hyperboloïde; car, si l'on considère trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et que sur ces trois droites on construise un hyperboloïde, il aura sept points communs

avec la cubique et la contiendra tout entière ; donc toute droite rencontrant $A\alpha$, $B\beta$ et la cubique sera située sur cet hyperboloïde, car elle aura trois points communs avec lui. Donc :

Théorème XI. — *Le lieu des pôles de l'un des côtés du triangle* ABC *par rapport aux coniques de la famille est une conique circonscrite à ce triangle.*

Réciproquement, si l'on a une famille de coniques circonscrites à un triangle ABC et telles que le lieu des pôles du côté AB soit une conique S circonscrite

Fig. 8.



à ABC, on peut les considérer comme les perspectives d'une même cubique gauche, que l'on obtiendra en faisant passer un hyperboloïde par S et en traçant une cubique placée sur cet hyperboloïde et tangente à deux génératrices de même système en A et B.

Si g est le pôle de la droite AB par rapport à une de nos coniques, la droite correspondant à cette conique sera $\alpha\beta$. Si x, y, z sont les coordonnées du point g, la droite $\alpha\beta$ aura pour équation $\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}-\frac{Z}{z}=0$.

Or le lieu du point g est une conique circonscrite au triangle ABC. On a donc $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$. Donc :

Théorème XII. — *Les droites correspondant aux coniques de notre famille passent par un point fixe.*

Les points correspondants de ces mêmes coniques décrivent une conique circonscrite au triangle ABC.

On en conclut que l'enveloppe est une courbe du quatrième degré ayant quatre points de rebroussement. On voit de plus que les tangentes de rebroussement de l'enveloppe concourent en un point, qui est le point autour duquel tournent les droites correspondantes des coniques de la famille. Cette courbe du quatrième degré peut aussi être engendrée par les points correspondants des tangentes à une conique circonscrite au triangle ABC.

Il résulte aussi du théorème XII que par tout point du plan passent deux coniques de la famille, car l'enveloppe des droites correspondant aux coniques circonscrites passant par un même point est une conique.

Les réciproques sont vraies, c'est-à-dire que si des coniques circonscrites à un triangle ABC sont tangentes à une courbe du quatrième degré ayant A, B, C pour points de rebroussement, ou si leurs droites correspondantes passent par un point fixe, ou si leurs points correspondants décrivent une conique passant par A, B, C, on peut considérer ces coniques comme les perspectives d'une même cubique gauche. En se reportant au théorème I, on aura le théorème suivant :

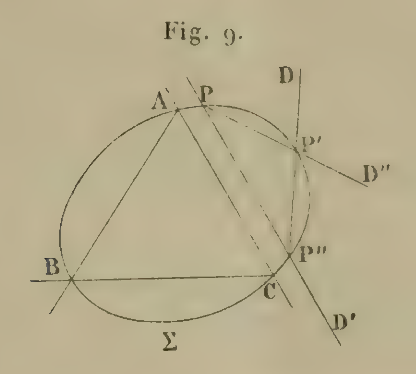
Théorème XIII. — *Si les droites correspondantes de trois coniques circonscrites à un triangle* ABC *sont concourantes, les trois points d'intersection (autres*

que A, B, C) *de ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite, et réciproquement.*

Si les points correspondants des trois coniques circonscrites au triangle ABC *sont sur une même conique circonscrite à ce même triangle, les points d'intersection* (*autres que* A, B, C) *de ces coniques, prises deux à deux, sont en ligne droite, et réciproquement.*

10. Soient Σ une conique circonscrite au triangle ABC et P, P′, P″ trois points de cette conique. Considérons les trois coniques circonscrites S, S′, S″ correspondant aux points P, P′, P″. Nous venons de voir que les

Fig. 9.



points d'intersection de ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite. Or ces points d'intersection sont les points conjugués des droites PP′, P′P″, PP″. Puisqu'ils sont en ligne droite, ces trois droites sont tangentes à une même conique inscrite au triangle. De là ce théorème :

Théorème XIV. — *Si deux triangles sont inscrits à une conique, leurs six côtés sont tangents à une même conique.*

On démontrera d'une manière analogue :

Théorème XV. — *Si deux triangles sont circon-*

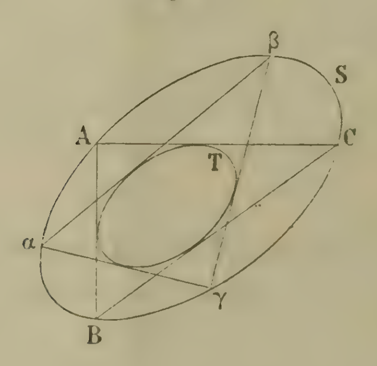
scrits à une même conique, leurs six sommets sont sur une même conique.

10. De ces théorèmes on peut déduire le théorème de Poncelet :

Étant données deux coniques S *et* T, *s'il existe un triangle* ABC *inscrit à* S *et circonscrit à* T, *il en existe une infinité.*

Prenons en effet un point β sur S, et de ce point menons les tangentes $\beta\alpha$, $\beta\gamma$ à T, et joignons $\alpha\gamma$. D'après le théorème XIV, il existe une conique tangente aux six

Fig. 10.



côtés des deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$; or cette conique se confond avec T, car elles sont tangentes aux cinq mêmes droites; donc, etc.

Inversement, du théorème de Poncelet on déduira facilement tous les théorèmes que nous avons démontrés, sans avoir recours à la courbe gauche qui nous a servi de base.

IV.

Nous allons examiner quelques cas particuliers des théorèmes que nous avons démontrés.

11. Nous avons vu que l'on pouvait définir la famille

des coniques au moyen de deux coniques Σ et Σ' (n° 1). Deux des points A, B, C pourraient être imaginaires sans que les théorèmes que nous avons démontrés cessent d'être vrais.

Supposons, en particulier, que ces deux coniques soient des cercles, le théorème XI devient alors le suivant :

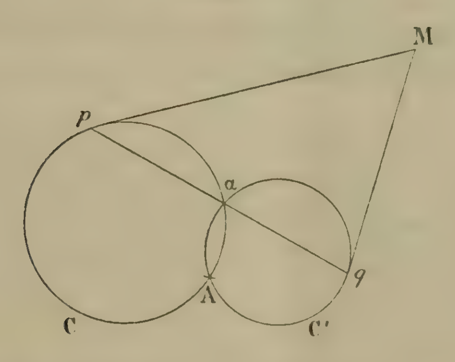
Si trois cercles ont un point commun A *et si les trois autres points communs à ces cercles pris deux à deux sont en ligne droite, leurs trois centres et le point* A *sont sur un même cercle, et réciproquement.*

Ce théorème est facile à démontrer par la Géométrie élémentaire ; c'est une conséquence immédiate du théorème de Simpson.

On en conclura facilement les théorèmes suivants, qui sont toujours des cas particuliers de théorèmes déjà démontrés :

Soient C *et* C' *deux cercles,* A *et* α *leurs points d'intersection. Par* α *on mène une sécante variable* αpq,

Fig. 11.



et l'on trace le cercle circonscrit au triangle Apq. *On a ainsi une famille de cercles :*

1° *Le lieu de leurs centres est un cercle passant en* A ;

2° *Les points d'intersection* (*autres que* A) *de trois quelconques de ces cercles pris deux à deux sont en ligne droite;*

3° *Le cercle passant par* A, p, q *passe en* M, *et le point* M *est le point où ce cercle touche l'enveloppe des cercles analogues;*

4° *Cette enveloppe* (*ou lieu des points* M) *est un limaçon de Pascal qui a un point de rebroussement en* A.

12. Nous ne ferons que signaler le cas où le plan de la figure serait tangent à la cubique gauche. On aurait alors une famille de coniques passant par un point A et tangentes à une droite D en un point donné B. L'enveloppe serait alors une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement en A, un point d'inflexion en B avec D pour tangente en ce point.

Comme cas particulier, B pourrait être à l'infini; les coniques auraient alors une asymptote commune.

Enfin, si la droite D allait elle-même à l'infini, on aurait une famille de paraboles ayant un point commun A, et ayant même direction d'axe. Leur enveloppe serait une cubique de la forme $y^2 = x^3$, ayant le point A pour point de rebroussement. De là ce théorème :

On donne la courbe $y^2 = x^3$, *et l'on considère des paraboles ayant leurs axes parallèles à* Oy, *passant à l'origine et tangentes à la courbe donnée. Si l'on prend trois quelconques de ces paraboles, les points d'intersection des paraboles prises deux à deux sont en ligne droite.*

13. Le plan de la figure peut aussi être osculateur à la cubique gauche. On a alors une famille de coniques osculatrices en un même point A. Les points d'inter-

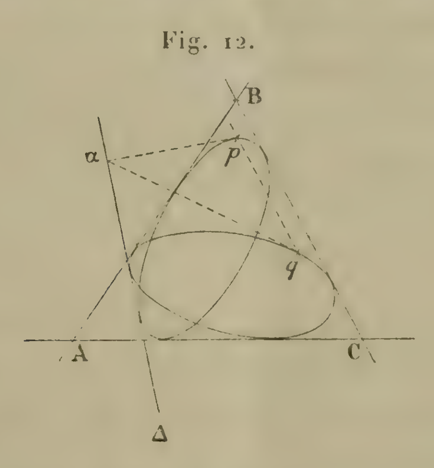
section de trois quelconques de ces coniques prises deux à deux sont encore en ligne droite. Dans ce cas, l'enveloppe est une conique, tangente en A à toutes les coniques de la famille.

V.

14. En transformant par polaires réciproques les propriétés que nous avons démontrées jusqu'ici, nous allons obtenir une nouvelle série de propriétés. Nous ferons observer d'abord que, si une conique est circonscrite à un triangle ABC, sa conjuguée sera une conique inscrite au triangle conjugué du premier, A′B′C′, et que la droite et le point correspondant à la première conique par rapport au triangle ABC auront pour conjugués le point et la droite correspondant à la deuxième conique par rapport à A′B′C′.

Ceci posé, soient ABC un triangle, T et T′ deux coniques inscrites à ce triangle, Δ leur quatrième tangente

Fig. 12.



commune. Prenons sur cette droite un point α, et menons de α les tangentes αp, αq aux coniques T et T′, puis construisons la conique T″ inscrite au triangle ABC et tangente aux droites αp, αq. Lorsque le point α se

déplace sur Δ, nous aurons une famille de coniques qui jouiront des propriétés suivantes :

1° Si l'on prend trois quelconques de ces coniques, les tangentes communes de ces coniques prises deux à deux sont concourantes.

2° La conique T'' tangente à AB, BC, AC, αp, αq est tangente à pq, et pq est la tangente à l'enveloppe de ces coniques au point où elle est touchée par T''.

Ou, ce qui revient au même, si Δ est la tangente commune à deux coniques T et T' de la famille, le point de contact de Δ et de T est sur la tangente à T' au point où elle touche l'enveloppe.

3° L'enveloppe de ces coniques (ou enveloppe des droites pq) est une courbe du troisième degré, qui a pour tangentes de rebroussement les trois côtés du triangle ABC, et qui a un point double.

4° La polaire de l'un des sommets du triangle ABC enveloppe une conique inscrite à ce triangle.

5° Les points correspondant à ces coniques par rapport au triangle ABC sont en ligne droite.

6° Si les points correspondants de trois coniques inscrites à un triangle sont en ligne droite, les tangentes communes à ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite, et réciproquement.

Citons comme cas particulier du quatrième théorème :

Si trois paraboles ayant un foyer commun ont leurs sommets en ligne droite, les tangentes communes à ces paraboles prises deux à deux sont concourantes, et réciproquement.

La démonstration élémentaire de cette proposition n'offre aucune difficulté.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES SURFACES RÉGLÉES DONT LA LIGNE DE STRICTION SATISFAIT A CERTAINES CONDITIONS;

Par M. E. AMIGUES.

I. Premier problème. — *La ligne de striction est donnée.*

1. Soient

$$x_1 = f(s),$$
$$y_1 = \varphi(s),$$
$$z_1 = \psi(s),$$

les équations de la ligne donnée, dans lesquelles x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point variable P de la ligne, et s une variable auxiliaire représentant la longueur de l'arc AP de cette ligne qui est compris entre un point fixe A et le point variable P.

Soient λ, μ, ν les cosinus des angles que la génératrice du point P fait avec les trois axes des coordonnées rectangulaires. Soit u une longueur quelconque PM prise sur cette génératrice et désignons par x, y, z les coordonnées du point M. On a alors

$$x = f(s) + \lambda u,$$
$$y = \varphi(s) + \mu u,$$
$$z = \psi(s) + \nu u.$$

Ces équations, dans lesquelles s et u sont deux variables indépendantes et λ, μ, ν des fonctions arbitraires de s, représentent toutes les surfaces réglées passant par la ligne donnée.

Il est aisé de voir qu'elles représentent toutes les sur-

faces réglées ayant pour ligne de striction la ligne donnée, si les fonctions de s que nous appelons λ, μ, ν satisfont à l'équation différentielle suivante :

$$\sum f'(s)\frac{d\lambda}{ds} = 0. \tag{1}$$

Si, d'autre part, on appelle α l'angle de la génératrice qui passe au point P avec la courbe donnée, on a évidemment, que cette courbe soit ou non ligne de striction,

$$\cos\alpha = \Sigma\,\lambda f'(s). \tag{2}$$

Enfin, il est facile de calculer le paramètre de distribution ϖ de la génératrice du point P. La valeur de ce paramètre, dans le cas particulier où la ligne donnée est ligne de striction, prend la valeur simple qui suit :

$$\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2} = \sum\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2. \tag{3}$$

2. Laissons α fonction arbitraire de s. Définissons les fonctions λ, μ, ν par les équations (1) et (2), auxquelles se joint l'équation

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1, \tag{4}$$

et nous aurons ainsi toutes les surfaces réglées ayant la ligne de striction donnée. L'équation (3) nous donnera alors le paramètre de distribution pour les génératrices de la surface.

Pour intégrer le système [(1), (2), (4)], différentions (2) en tenant compte de (1). Nous aurons

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \sum\lambda f''(s); \tag{5}$$

alors (2), (4), (5) donnent λ, μ, ν. Les relations (2)

et (5) donnent d'abord λ et μ. Portant ces valeurs dans (4), on a une équation en ν du second degré.

3. Supposons, comme exemple, qu'on nous donne l'hélice représentée par les équations suivantes :

$$x = a\cos\frac{s}{a},$$

$$y = a\sin\frac{s}{a},$$

$$z = bs.$$

En posant

$$R = \sqrt{b^2 + \sin^2\alpha - a^2(b^2+1)\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2},$$

on obtient

$$\lambda = -\sin\frac{s}{a}\,\frac{\cos\alpha - bR}{b^2+1} - a\cos\frac{s}{a}\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\mu = \cos\frac{s}{a}\,\frac{\cos\alpha - bR}{b^2+1} - a\sin\frac{s}{a}\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\nu = \frac{b\cos\alpha + R}{b^2+1}.$$

Il est facile de calculer $\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2}$, c'est-à-dire $\sum\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2$.

On voit aisément que cette valeur de $\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2}$ ne contient que l'angle α et ses dérivées. D'où le résultat suivant, qui est pour ainsi dire évident *a priori :*

Dans toute surface réglée où la ligne de striction est une hélice, si toutes les génératrices coupent cette ligne sous un même angle, toutes ont le même paramètre de distribution.

La réciproque est fausse. Si la ligne de striction est une hélice et que le paramètre de distribution soit le même pour toutes les génératrices, le cosinus de l'angle sous lequel ces génératrices coupent l'hélice, au lieu

d'être constant, est une fonction de s définie par une équation différentielle du second ordre.

4. En faisant $b = 0$ dans le cas précédent, l'hélice devient un cercle de striction. On a, dans ce cas,

$$\lambda = -\cos\alpha \sin\frac{s}{a} - a\cos\frac{s}{a}\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\mu = \cos\alpha\cos\frac{s}{a} - a\sin\frac{s}{a}\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\nu = \sin\alpha\sqrt{1 - a^2\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2}.$$

Si, en particulier, α est une constante, il est facile de voir qu'on a la surface gauche de révolution. Donc :

Toute surface gauche qui a un cercle pour ligne de striction et dont les génératrices coupent ce cercle sous le même angle est une surface gauche de révolution.

II. Second problème. — *La ligne de striction est plane.*

1. Prenant le plan de cette ligne pour plan des xy, on a

$$\psi(s) = 0;$$

alors la relation

$$f'(s)^2 + \varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1$$

devient

$$f'(s)^2 + \varphi'(s)^2 = 1.$$

Nous poserons

$$f'(s) = \cos\omega,$$
$$\varphi'(s) = \sin\omega;$$

ω sera alors une fonction arbitraire de s, puisque la ligne de striction est une ligne plane arbitraire. Prenons pour α une fonction arbitraire de s.

Nous aurons alors les équations suivantes pour déterminer les fonctions de s que nous appelons λ, μ, ν,

$$\frac{d\lambda}{ds}\cos\omega + \frac{d\mu}{ds}\sin\omega = 0, \tag{1}$$

$$\lambda\cos\omega + \mu\sin\omega = \cos\alpha, \tag{2}$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \tag{3}$$

Différentions (2) en tenant compte de (1). Nous avons ainsi

$$-\lambda\sin\omega + \mu\cos\omega = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}. \tag{4}$$

Les équations (2) et (4) donnent λ et μ. Puis l'équation (3) donne ν.

Le problème est donc résolu. On obtient

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos\omega\cos\alpha + \sin\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}, \\ \mu &= \sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}, \\ \nu &= \sin\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En particulier, si α est une constante, nous aurons pour les équations de la surface

$$\left\{\begin{aligned} x &= \int\cos\omega\, ds + u\cos\omega\cos\alpha, \\ y &= \int\sin\omega\, ds + u\sin\omega\cos\alpha, \\ z &= u\sin\alpha. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Dans ces formules (6), ω représente une fonction arbitraire de s.

2. Pour calculer le paramètre de distribution des surfaces ci-dessus, différentions la formule (4).

Nous obtenons

$$-\frac{d\lambda}{ds}\sin\omega + \frac{d\mu}{ds}\cos\omega = \cos\alpha\frac{d\omega}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right).$$

Ajoutons le carré de cette dernière équation au carré de l'équation (1). Nous avons ainsi

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = \left[\cos\alpha\frac{d\omega}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right)\right]^2.$$

Cette expression ne dépend que de α, de ω et de leurs dérivées, mais ne contient pas s directement.

Il en est évidemment de même de $\frac{d\nu}{ds}$, d'après la dernière des formules (5); et, par suite, il en est de même du paramètre de distribution.

SUR DEUX DÉTERMINANTS NUMÉRIQUES;

PAR M. G. FOURET.

Certains déterminants numériques, d'une forme simple, présentent, quel que soit leur ordre, des valeurs remarquables. En voici deux exemples, qu'il nous a paru intéressant de faire connaître.

I. *Le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n$$

a, quel que soit son ordre n, une valeur égale à l'unité.

Désignons par X_n ce déterminant. Nous n'altérons pas sa valeur en retranchant des éléments de la première colonne les éléments correspondants de la seconde. On a par suite

$$X_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = X_{n-1};$$

c'est-à-dire

$$X_n = X_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. *Le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n$$

est nul ou égal à l'unité, suivant que son ordre n est impair ou pair ([1]).

Désignons par Y_n ce déterminant. En retranchant les éléments de la seconde colonne des éléments correspon-

---

([1]) On sait d'ailleurs, d'une manière générale, que tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul.

dants de la première, on a encore

$$Y_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n$$

ou bien, en développant ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne,

$$Y_n = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1},$$

c'est-à-dire, d'après les notations que nous avons adoptées,

$$Y_n = -Y_{n-1} + X_{n-1}$$

ou encore, en vertu du premier théorème,

$$Y_n = -Y_{n-1} + 1.$$

Mais on a

$$Y_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

On en conclut, d'après la relation de récurrence trouvée,

$$Y_3 = 0, \quad Y_4 = 1, \quad Y_5 = 0, \quad \dots \quad \text{c. q. f. d.}$$

Dans une Note publiée en 1886 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XIV, p. 146), nous avons fait connaître la valeur de quelques autres déterminants numériques remarquables. Nous ajouterons que l'on trouve démontré, dans cette même Note, le second des deux théorèmes communiqués par M. J. Mouchel aux lecteurs des *Nouvelles Annales*, en août dernier, théorèmes qui ne diffèrent d'ailleurs entre eux

que par la forme de l'énoncé. Nous rappellerons enfin que, dès 1846, M. Catalan s'était occupé de questions du même genre dans ses *Recherches sur les déterminants* (*Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique,* t. XIII, 2e Partie, p. 534).

NOUVEAU THÉORÈME SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur au lycée de Nantes.

Un de mes élèves, *Gaston Brunet* (classe de 4e année d'Enseignement spécial) a le mérite d'avoir remarqué par des essais la propriété numérique suivante :

Soit les progressions

$$\div 1.3.5.7.9.11.13\ldots$$
$$\div 1\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 13\ldots$$

Le premier terme de la dernière est le cube du premier terme de la première; la somme des trois termes suivants (5, 9, 13) est le cube du terme 3, la somme des cinq termes suivants est le cube du terme 5, etc.

Il a été conduit à cette relation par la même relation connue sur les progressions

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots$$
$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad \ldots.$$

Cette propriété et celle que Brunet a trouvée sont des cas

particuliers du théorème suivant auquel elles m'ont conduit :

Soient

$$a.b.c.d.e.f\ldots k.l(l+\mathrm{R})\ldots$$

une progression arithmétique à termes entiers et soient

$$a.c.e.g\ldots k(l+\mathrm{R})\ldots$$

la progression formée par les termes de rang impair de l'autre ; je décompose la seconde en groupes de a, b, c, d, $\ldots l$, $(l+\mathrm{R})$ *termes : la somme des termes du premier groupe vaut le cube de* a, *la somme des termes du second groupe vaut le cube de* b, $\ldots$, *la somme des termes du* $(n+1)$ *groupe vaut le cube de* $l+\mathrm{R}$, *à la seule condition que le terme* a *soit l'unité ou à la seule condition que* $\mathrm{R}=a$.

Démonstration. — Le premier terme du groupe qui contient $l+\mathrm{R}$ termes de la seconde progression est précédé par

$$a+b+c+\ldots+l \quad \text{ou} \quad (a+l)\frac{n}{2} \text{ termes.}$$

Je remplace n par sa valeur tirée de la formule connue

$$l=a+(n-1)\mathrm{R}$$

et je trouve que le nombre des termes qui précèdent ce terme est

$$\frac{(a+l)(l-a+\mathrm{R})}{2\mathrm{R}}.$$

Ce terme vaut donc

$$a+(a+l)(l-a+\mathrm{R}).$$

Le dernier terme du groupe considéré vaut

$$a+(a+l)(l-a+\mathrm{R})+(l+\mathrm{R}-1)2\mathrm{R}.$$

et la somme des termes de ce groupe

$$[a+(a+l)(l-a+R)+(l+R-1)R](l+R),$$

expression qui peut s'écrire

$$[(l+R)^2+(1-a)(a-R)](l+R)$$

et qui peut se réduire à $(l+R)^3$, soit lorsque $a=1$, soit lorsque $R=a$. C. Q. F. D.

Application I. — La somme des cubes des n premiers nombres impairs

$$1.3.5\ldots(2n-1)$$

est égale à la somme des

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) \quad \text{ou} \quad n^2$$

premiers termes de la progression

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad \ldots, \quad l,$$

ou à

$$(1+l)\frac{n^2}{2},$$

qui s'écrit, en remplaçant l par $1+(n^2-1)4$,

$$(2n^2-1)n^2.$$

Application II. — La somme des cubes des n premiers nombres pairs

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad \ldots, \quad 2n$$

égale la somme des

$$2+4+6+\ldots+2n \quad \text{ou} \quad n(n+1)$$

premiers termes de la progression

$$2.6.10.14\ldots l.$$

Elle vaut donc

$$(2+l)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Substituant à l son expression

$$2+[n(n+1)-1]\,i,$$

j'obtiens, pour expression de la somme cherchée,

$$2n^2(n+1)^2.$$

LONGUEUR DES AXES D'UNE SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE, EN COORDONNÉES OBLIQUES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY.

I. — *Notations.*

Nous désignerons par λ, μ, ν les angles des axes OX, OY, OZ; nous représenterons le plan par l'équation

$$lX+mY+nZ+p=0,$$

et la quadrique (à centre unique) par

$$f(X,Y,Z)\equiv\varphi(X,Y,Z)+2CX+2C'Y+2C''Z+D=0,$$

en posant

$$\varphi(X,Y,Z)\equiv AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+B'ZX+2B''XY.$$

Enfin, nous poserons, pour abréger,

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},\qquad H=\left|\begin{array}{ccc:c} & \Delta & & \begin{matrix} C \\ C' \\ C''\end{matrix} \\ \hdashline C & C' & C'' & D \end{array}\right|,$$

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{c:c} \Delta & \begin{matrix} l \\ m \\ n\end{matrix} \\ \hdashline l \;\; m \;\; n & 0 \end{array}\right|,\qquad H_1=\left|\begin{array}{c:c} H & \begin{matrix} l \\ m \\ n \\ p\end{matrix} \\ \hdashline l \;\; m \;\; n & 0 \end{array}\right|,\qquad K=\frac{H_1}{\Delta_1},$$

$$[\rho] = \begin{vmatrix} A + \frac{K}{\rho} & B'' + \frac{K}{\rho}\cos\nu & B' + \frac{K}{\rho}\cos\mu & l \\ B'' + \frac{K}{\rho}\cos\nu & A' + \frac{K}{\rho} & B + \frac{K}{\rho}\cos\lambda & m \\ B' + \frac{K}{\rho}\cos\mu & B + \frac{K}{\rho}\cos\lambda & A'' + \frac{K}{\rho} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix},$$

$$\sigma(x, y, z) \equiv \sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu.$$

II. — *Théorèmes préliminaires.*

Théorème I. — *Les équations de la conique, par rapport à des axes ox, oy, oz, parallèles à* OX, OY, OZ, *et passant par son centre o, sont*

(1) $$lx + my + nz = 0,$$

(2) $$\varphi(x, y, z) + K = 0.$$

En effet, en désignant par a, b, c les coordonnées du centre o, les équations de la conique dans le nouveau système sont évidemment

$$lx + my + nz = 0,$$

$$f(x + a, y + b, z + c) \equiv \varphi(x, y, z) + xf'_a + yf'_b + zf'_c + f(a, b, c) = 0,$$

et l'on a, pour calculer a, b, c, les équations

$$la + mb + nc + p = 0, \qquad \frac{f'_a}{l} = \frac{f'_b}{m} = \frac{f'_c}{n},$$

qui expriment que le centre o est l'intersection du plan donné et du diamètre de la quadrique qui est conjugué de ce plan. Les deux dernières équations montrent que, $lx + my + nz$ étant nul pour tout point x, y, z de la conique, il en est de même de $xf''_a + yf'_b + zf'_c$. Il reste donc simplement à calculer $f(a, b, c)$. A cet effet, désignons par $-2t$ la valeur commune des trois rapports

précédents; il en résulte les équations

$$\begin{aligned} Aa + B''b + B'c + C + lt &= 0, \\ B''a + A'b + Bc + C' + mt &= 0, \\ B'a + Bb + A''c + C'' + nt &= 0, \end{aligned}$$

qui, multipliées respectivement par a, b, c et ajoutées ensemble, donnent

$$Ca + C'b + C''c + D - f(a, b, c) + pt = 0.$$

En joignant à ces quatre équations la suivante

$$la + mb + nc + p = 0,$$

on a un système linéaire et non homogène en a, b, c, t, $f(a, b, c)$, qui donne $f(a, b, c)$ par les formules de Cramer; ou, plus simplement encore, on élimine a, b, c (en tant qu'ils figurent explicitement) et t, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} & \Delta & \end{matrix} & C & l \\ & C' & m \\ & C'' & n \\ C \quad C' \quad C'' & D - f(a, b, c) & p \\ l \quad m \quad n & p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$H_1 - f(a, b, c)\Delta_1 = 0.$$

En conséquence, la conique est bien représentée, dans le système $oxyz$, par les équations (1) et (2).

Théorème II. — *Étant donnée la forme quadratique à trois variables $\theta(x, y, z)$, pour que le discriminant de la forme quadratique à deux variables*

$$\theta\left(x, y, -\frac{lx + my}{n}\right)$$

soit nul, il faut et il suffit que celui de la forme quadratique $\theta(x, y, z) + 2t(lx + my + nz)$ dépendant des quatre variables x, y, z, t soit nul lui-même.

En effet, lorsque le premier discriminant est nul, ou pour réduire la forme $\theta\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$ à un seul carré, qu'on peut d'ailleurs écrire

$$\varepsilon\left(ax+by-c\frac{lx+my}{n}\right)^2.$$

Par suite, $\theta(x, y, z)$ peut être mise sous la forme

$$\varepsilon(ax+by+cz)^2,$$

et, comme $2t(lx+my+nz)$ est une somme algébrique de deux carrés, la forme

$$\theta(x, y, z)+2t(lx+my+nz)$$

est réductible à trois carrés; or elle dépend de quatre variables; son discriminant est alors nul.

Réciproquement, si son discriminant est nul, cette dernière forme est réductible à moins de quatre carrés; deux sont fournis par la décomposition de

$$2t(lx+my+nz);$$

donc $\theta(x, y, z)$, qui est indépendante de t, doit se réduire à un seul carré

$$\varepsilon(ax+by+cz)^2.$$

Il en résulte que la forme à deux variables

$$\theta\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$$

se réduit à un seul carré

$$\varepsilon\left(ax+by-c\frac{lx+my}{n}\right)^2$$

et, par conséquent, que son discriminant est nul.

III. — *Recherches des longueurs des axes.*

Cela posé, voici le théorème qui fait l'objet de cette Note :

L'équation aux carrés des longueurs des demi-axes de la conique $f(X, Y, Z) = 0$, $lX + mY + nZ + p = 0$ *est* $[\rho] = 0$.

Démonstration. — Dans toutes les méthodes de démonstration qui suivent, nous supposons, pour simplifier, la conique préalablement rapportée au système $oxyz$, ce qui naturellement ne change pas la grandeur de ses axes, ni par suite l'équation demandée. Nous raisonnons donc dans le système $oxyz$, et nous représentons la conique, en vertu du Théorème I, par les équations (1) et (2).

Première méthode. — Pour qu'un point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit sommet de la conique, il faut et il suffit qu'on puisse mener par la tangente en s un plan perpendiculaire au diamètre os.

La tangente en s a pour équations

$$(3) \quad lx + my + nz = 0, \qquad x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2K = 0.$$

L'équation générale des plans passant par cette droite est

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2K + 2t(lx + my + nz) = 0,$$

t désignant un paramètre arbitraire.

Pour que ce plan soit perpendiculaire à la droite $\overline{os}$, dont les équations sont

$$(4) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$(5) \qquad \frac{\varphi'_\alpha + 2lt}{\frac{1}{2}\sigma'_\alpha} = \frac{\varphi'_\beta + 2mt}{\frac{1}{2}\sigma'_\beta} = \frac{\varphi'_\gamma + 2nt}{\frac{1}{2}\sigma'_\gamma}.$$

Or, en multipliant haut et bas ces rapports respectivement par α, β, γ, et les ajoutant terme à terme, on obtient le rapport

$$\frac{\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma + 2t(l\alpha + m\beta + n\gamma)}{\frac{1}{2}(\alpha\sigma_\alpha + \beta\sigma_\beta + \gamma\sigma_\gamma)},$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$\frac{2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + 2t(l\alpha + m\beta + n\gamma)}{\sigma(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Enfin, en observant que α, β, γ satisfont aux équations (1) et (2), et en désignant par ρ la longueur du demi-axe *os*, ce rapport se réduit à $-\frac{2K}{\rho}$. Et comme, d'après son mode de formation, ce rapport est égal à chacun des rapports (5), on a

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha + 2lt = 0, \\ \varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta + 2mt = 0, \\ \varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma + 2nt = 0. \end{cases}$$

En joignant à ces trois équations la suivante

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

et éliminant α, β, γ, t, on obtient immédiatement l'équation

$$[\rho] = 0.$$

Deuxième méthode. — Pour qu'un point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit un sommet de la conique, il faut et il suffit que la

tangente à la conique en s soit perpendiculaire à os, c'est-à-dire que les droites (3) et (4) soient rectangulaires. Les coefficients directeurs de la première sont

$$m\varphi'_\gamma - n\varphi'_\beta, \quad n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma, \quad l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha.$$

La condition de rectangularité est donc, d'après une formule connue,

$$(7) \quad (m\varphi'_\gamma - n\varphi'_\beta)\sigma'_\alpha + (n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma)\sigma'_\beta + (l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha)\sigma'_\gamma = 0.$$

L'équation cherchée est le résultat de l'élimination de α, β, γ entre l'équation (7) et les trois suivantes, où ρ désigne l'inconnue os,

$$(8) \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

$$(9) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \mathrm{K} = 0,$$

$$(10) \qquad \sigma(\alpha, \beta, \gamma) = \rho.$$

L'équation (7) peut s'écrire

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} l(\varphi'_\beta\sigma'_\gamma - \varphi'_\gamma\sigma'_\beta) + m(\varphi'_\gamma\sigma'_\alpha - \varphi'_\alpha\sigma'_\gamma) \\ + n(\varphi'_\alpha\sigma'_\beta - \varphi'_\beta\sigma'_\alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (8) et (11), homogènes en l, m, n, donnent

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta(\varphi'_\alpha\sigma'_\beta - \varphi'_\beta\sigma'_\alpha) - \gamma(\varphi'_\gamma\sigma'_\alpha - \varphi'_\alpha\sigma'_\gamma)}{l} \\ & = \frac{\gamma(\varphi'_\beta\sigma'_\gamma - \varphi'_\gamma\sigma'_\beta) - \alpha(\varphi'_\alpha\sigma'_\beta - \varphi'_\beta\sigma'_\alpha)}{m} \\ & = \frac{\alpha(\varphi'_\gamma\sigma'_\alpha - \varphi'_\alpha\sigma'_\gamma) - \beta(\varphi'_\beta\sigma'_\gamma - \varphi'_\gamma\sigma'_\beta)}{n}. \end{aligned} \right.$$

Or le numérateur du premier rapport peut s'écrire successivement

$$(\beta\sigma'_\beta + \gamma\sigma'_\gamma)\varphi'_\alpha - \sigma'_\alpha(\beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma),$$

$$(\alpha\sigma'_\alpha + \beta\sigma'_\beta + \gamma\sigma'_\gamma)\varphi'_\alpha - \sigma'_\alpha(\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma)$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$2\sigma(\alpha, \beta, \gamma)\varphi'_\alpha - 2\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\sigma'_\alpha.$$

et enfin, d'après (9) et (10),

$$2\rho\varphi'_\alpha + 2K\sigma'_\alpha.$$

Les numérateurs des deux autres rapports sont, de même,

$$2\rho\varphi'_\beta + 2K\sigma'_\beta, \quad 2\rho\varphi'_\gamma + 2K\sigma'_\gamma.$$

Les équations (12) deviennent donc

$$(13) \qquad \frac{\varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha}{l} = \frac{\varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta}{m} = \frac{\varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma}{n}.$$

En désignant par $-2t$ la valeur commune de ces rapports, on en conclut les équations (6) et, par suite encore, $[\rho] = 0$.

Troisième méthode. — Pour qu'un point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit sommet de la conique, il faut et il suffit que les tangentes en s à la conique et au cercle concentrique qui passe par ce point soient parallèles.

La tangente à la conique en s est représentée par les équations (3).

Le cercle considéré étant représenté par les équations

$$(14) \qquad lx + my + nz = 0, \qquad \sigma(x, y, z) = \rho,$$

les équations de la tangente en s à ce cercle sont

$$(15) \quad lx + my + nz = 0, \qquad x\sigma'_\alpha + y\sigma'_\beta + z\sigma'_\gamma - 2\rho = 0.$$

Pour que les droites (3) et (14) soient parallèles, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{m\sigma'_\gamma - n\sigma'_\beta}{m\varphi'_\gamma - n\varphi'_\beta} = \frac{n\sigma'_\alpha - l\sigma'_\gamma}{n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma} = \frac{l\sigma'_\beta - m\sigma'_\alpha}{l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha}.$$

La somme des numérateurs, respectivement multipliés par σ'_α, σ'_β, σ'_γ, est identiquement nulle. On a donc aussi,

à l'égard des dénominateurs,

$$\sigma'_\alpha(m\varphi'_\gamma - \varphi'_\beta) + \sigma'_\beta(n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma) + \sigma'_\gamma(l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha) = 0.$$

C'est la relation (7). Comme on a, d'ailleurs, les relations (8), (9), (10), on voit qu'on retrouve, pour déterminer α, β, γ, ρ, exactement les mêmes équations que dans la *deuxième méthode*.

Quatrième méthode. — Pour que le point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit un sommet de la conique, il faut et il suffit que le plan de la conique soit tangent au cône qui a pour sommet le centre o de la conique et pour directrice l'intersection de l'ellipsoïde avec la sphère de centre o qui passe par le point s.

Soit $\sigma(x, y, z) = \rho$ la sphère considérée. Le cône considéré a pour équation

$$\varphi(x, y, z) + \frac{K}{\rho}\sigma(x, y, z) = 0,$$

et par suite son plan tangent en s est représenté par

$$x\left(\varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha\right) + y\left(\varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta\right) + z\left(\varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma\right) = 0.$$

Pour que ce plan se confonde avec celui de la conique, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha}{l} = \frac{\varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta}{m} = \frac{\varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma}{n}.$$

Ce sont les équations (13), d'où l'on conclut les équations (6), et par suite $[\rho] = 0$.

Cinquième méthode. — Les valeurs cherchées de ρ sont les carrés des rayons des deux cercles concentriques et bitangents à la conique.

L'un quelconque de ces cercles est représenté par les équations (14).

Pour que la conique et le cercle considéré soient bitangents, il faut et il suffit qu'il en soit de même de leurs projections sur le plan xoy, savoir

$$\varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right) + K = 0,$$
$$\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right) - \rho = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante de bitangence de ces deux coniques est que leurs cordes communes passant par le point o, savoir

$$(16)\quad \varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right) + \frac{K}{\rho}\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right) = 0,$$

soient confondues. Or, pour cela, il faut et il suffit que le premier membre de (16), qui est une forme quadratique à deux variables, se réduise à un seul carré et, par conséquent, que son discriminant soit nul, condition qui, en vertu du théorème II, revient à égaler à zéro le discriminant de la forme suivante à quatre variables x, y, z, t,

$$\varphi(x, y, z) + \frac{K}{\rho}\sigma(x, y, z) + 2t(lx+my+nz).$$

On obtient ainsi l'équation

$$[\rho] = 0.$$

Cette méthode est remarquable, en ce qu'elle n'exige, comme on voit, presque aucun calcul.

Sixième méthode. — Les valeurs cherchées de ρ sont le maximum et le minimum de la fonction $\sigma(x, y, z)$, où x, y, z sont assujettis aux relations

$$lx+my+nz = 0, \qquad \varphi(x, y, z) + K = 0.$$

On peut évidemment encore dire que ce sont le maximum et le minimum de

$$\frac{-\mathrm{K}\sigma\left(x, y, -\dfrac{lx+my}{n}\right)}{\varphi\left(x, y, -\dfrac{lx+my}{n}\right)}.$$

Les deux termes de cette fraction sont des fonctions homogènes du second degré en x et y, et, par conséquent, d'après la théorie élémentaire des maximum et minimum de la fraction générale du second degré, les valeurs de ρ sont les racines du discriminant de la forme

$$\varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right) + \frac{\mathrm{K}}{\rho}\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$$

ou, ce qui revient au même, d'après le théorème II, de la suivante

$$\varphi + \frac{\mathrm{K}}{\rho}\sigma + 2t(lx + my + nz),$$

ce qui donne

$$[\rho] = 0.$$

SUR LE LIEU DES FOYERS DES CONIQUES QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS D'UN CERCLE;

PAR M. H. FAURE,

Chef d'escadron d'Artillerie en retraite.

M. Salmon, dans son *Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*), démontre, d'après le Dr Hart, qu'il existe deux cubiques circulaires ayant pour foyers quatre points A, B, C, D d'un cercle et que ces deux cubiques constituent le lieu de l'intersection de deux coniques sem-

blables dont les foyers sont respectivement A et B, C et D (p. 353). D'autre part, M. Salmon (*Sections coniques*, p. 301) montre que le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre, qui se décompose en deux autres qui sont respectivement du troisième ordre, lorsque les quatre points sont sur un cercle.

Je ne crois pas que l'on ait remarqué que ces deux courbes du troisième ordre sont précisément les deux cubiques circulaires du Dr Hart. En voici une démonstration.

Soit F le foyer d'une *ellipse* passant par les quatre points A, B, C, D, d'après les expressions connues des rayons vecteurs,

$$FA = a - \frac{cx_1}{a}, \qquad FB = a - \frac{cx_2}{a};$$

d'où

$$FA - FB = \frac{c}{a}(x_2 - x_1)$$

et

$$\left(\frac{FA - FB}{AB}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + 1}\right].$$

Dans cette relation, x_1, y_1, x_2, y_2 sont les coordonnées des points A, B, l'ellipse étant rapportée à ses axes.

On aurait de même, x_3, y_3, x_4, y_4 étant les coordonnées des points C et D,

$$\left(\frac{FC - FD}{CD}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\right)^2 + 1}\right].$$

Si les quatre points A, B, C, D sont sur un cercle, les cordes AB, CD sont également inclinées sur les axes; par suite,

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = \left(\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\right)^2;$$

par conséquent,

$$\frac{\mathrm{FA}-\mathrm{FB}}{\mathrm{AB}}=\pm\frac{\mathrm{FC}-\mathrm{FD}}{\mathrm{CD}}.$$

Lorsque la conique est une *hyperbole* et que les quatre points A, B, C, D sont sur la même branche, on a la même relation; mais, si, les points A et C étant sur une branche, les points B et D sont sur l'autre, on a

$$\frac{\mathrm{FA}+\mathrm{FB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{FC}+\mathrm{FD}}{\mathrm{CD}}.$$

Dans ce cas, en effet, on a, par exemple,

$$\mathrm{FA}=-a+\frac{cx_1}{a},\qquad \mathrm{FB}=a-\frac{cx_2}{a};$$

d'où

$$\mathrm{FA}+\mathrm{FB}=\frac{c}{a}(x_1-x_2)$$

et de même

$$\mathrm{FC}+\mathrm{FD}=\frac{c}{a}(x_3-x_4),\qquad \ldots.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points A, B, C, D *d'un cercle est aussi le lieu de l'intersection de deux coniques semblables ayant respectivement pour foyers les points* A *et* B, C *et* D, *c'est-à-dire qu'il coïncide avec les deux cubiques circulaires qui ont pour foyers les points* A, B, C, D.

SUR CERTAINES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE;

Par M. A. GUTZMER.

Extrait d'une Lettre adressée à M. F. Gomes Teixeira (¹).

... Vous connaissez le théorème de M. Rouché (²) sur la moyenne arithmétique d'une fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu,$$

selon lequel la moyenne arithmétique de toutes les valeurs de $\frac{f(x)}{x^n}$, correspondant à une valeur déterminée du module r de la variable

$$x = r\,e^{\theta i} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

est égale au coefficient a_n, ce qui s'écrit

$$\mathrm{M}_r \frac{f(x)}{x^n} = a_n.$$

Ce théorème, cité par plusieurs auteurs et d'une cer-

(¹) *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

(²) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXᵉ Cahier. — *Voir* aussi Serret, *Algèbre supérieure.*

taine importance dans la théorie des fonctions, a été étendu par M. Thomae [1].

Je vais vous communiquer dans ces lignes un théorème analogue qui se rapporte aux valeurs du carré du module de la fonction $f(x)$ le long d'un cercle autour de l'origine, et qui sera publié prochainement dans les *Mathematische Annalen*.

Supposons que la série de puissance

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{1}$$

converge absolument dans la région définie par $|x| \leqq R$ (en désignant, d'après M. Weierstrass, par $|x|$ le module de la quantité x), et posons

$$x = r e^{\theta i} \qquad (r < R);$$

l'équation (1) deviendra

$$f(x) = f(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et, en multipliant par la quantité conjuguée

$$\bar{f}(r, \theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{a}_\mu r^\mu e^{-\mu\theta i},$$

nous obtiendrons

$$|f(r, \theta)|^2 = \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} a_\nu \bar{a}_\mu r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} a_\nu \bar{a}_\mu r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}.$$

---

[1] *Elementäre Theorie der analytischen Functionen*, p. 130.

En posant $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, cette équation devient

$$|f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} [(\alpha_\nu \alpha_\mu + \beta_\nu \beta_\mu) \cos(\nu-\mu)\theta + (\alpha_\nu \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_\nu) \sin(\nu-\mu)\theta]\, r^{\nu+\mu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} [(\alpha_{\mu+\lambda}\alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda}\beta_\mu)\cos\lambda\theta + (\alpha^{\mu+\lambda}\beta_\mu - \alpha_\mu \beta_{\mu+\lambda}) \sin\lambda\theta]\, r^{2\mu+\lambda}.$$

En posant

$$(2) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} (\alpha_{\mu+\lambda}\alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda}\beta_\mu) r^{2\mu+\lambda} = A_\lambda, \\ \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} (\alpha_{\mu+\lambda}\beta_\mu - \alpha_\mu\beta_{\mu+\lambda}) r^{2\mu+\lambda} = B_\lambda, \end{cases}$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(3) \quad |f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta).$$

Cette équation nous donne immédiatement

$$|f(r,\theta+\pi)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda (A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta)$$

et, par suite, nous aurons

$$\frac{1}{2}[|f(r,\theta)|^2 + |f(r,\theta+\pi)|^2] = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (A_{2\lambda} \cos 2\lambda\theta + B_{2\lambda} \sin 2\lambda\theta).$$

De même vous trouverez

$$\frac{1}{2}\left[\left|f\left(r, \theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|^2 + \left|f\left(r, \theta + \frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right]$$

$$= \sum_{\nu} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda (A_{2\lambda}\cos 2\lambda\theta + B_{2\lambda}\sin 2\lambda\theta),$$

et, en additionnant ces deux équations, vous aurez

$$\frac{1}{4}\left[|f(r,\theta)|^2 + \left|f\left(r, \theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|^2 + |f(r, \theta + \pi)|^2 + \left|f\left(r, \theta + \frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right]$$

$$= \sum_{\nu} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(A_{4\lambda}\cos 4\lambda\theta + B_{4\lambda}\sin 4\lambda\theta).$$

En continuant de cette manière, vous finirez par trouver l'équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(r, \theta + \frac{k\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}[A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta) + B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)]. \end{aligned}\right.$$

Maintenant il est facile de se convaincre que la dernière somme s'approche de la valeur zéro, si n augmente indéfiniment. En effet, en profitant des définitions (2) et de la supposition faite dans la série (1), il s'ensuit

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}[A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta) + B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)]$$

$$< \sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} r^{2\mu+2^n\lambda} \times (|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\alpha_\mu| + |\beta_{\mu+2^n\lambda}\beta_\mu| + |\alpha_{\mu+2^n\lambda}\beta_\mu| + |\alpha_\mu\beta_{\mu+2^n\lambda}|)$$

$$< \sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} r^{2\mu+2^n\lambda}(|\alpha_\mu| + |\beta_\mu|)(|\alpha_{\mu+2^n\lambda}| + |\beta_{\mu+2^n\lambda}|)$$

$$< \sum_{\mu=0}^{\infty} r^{\mu}(|\alpha_\mu| + |\beta_\mu|)\sum_{\lambda=1}^{\infty} r^{\mu+2^n\lambda}(|\alpha_{\mu+2^n\lambda}| + |\beta_{\mu+2^n\lambda}|).$$

La première somme est évidemment une quantité finie, tandis que la seconde en représente une sorte de reste; par conséquent, elle devra s'évanouir pour n infini, et de même le produit des deux séries.

Nous pouvons donc conclure que

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{k\pi}{2^{n-1}}\right) \right|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Or, le premier membre de (5) représente la moyenne arithmétique des carrés des modules de (1) pour tous les points du cercle $|x| = r$.

En indiquant cette moyenne par M_r, nous avons

$$(6) \qquad M_r |f(x)|^2 = M_r \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \right|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Cette équation nous fournit le théorème suivant :

La moyenne arithmétique des carrés des modules de toutes les valeurs que la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

puisse avoir le long du cercle $|x| = r$, *situé dans la région de convergence, est égale à la somme des carrés des modules des termes de la série.*

Il est aisé de voir que ce théorème subsiste encore pour des séries plus générales d'une seule ou de plusieurs variables. De même on peut énoncer ce théorème pour un cercle quelconque, situé dans la région de convergence de la série, pourvu qu'on prenne, au lieu de la série proposée, son développement autour du centre du cercle. Mais je n'y insisterai plus.

Dans ses recherches sur les séries trigonométriques [1], A. Harnack a trouvé quelques formules intégrales, qui ne sont autre chose que des théorèmes sur la moyenne d'une fonction, et il est facile de déduire d'une de ces formules une autre démonstration de notre théorème, laquelle je dois à une lettre dont M. W. Dyck m'a honoré; il s'ensuit que ce théorème a plus de généralité qu'on ne croirait d'après la démonstration donnée ci-dessus. Cependant A. Harnack n'a pas tiré des conséquences de sa formule pour les fonctions d'une variable complexe. Mais cette formule [2] m'a inspiré une nouvelle démonstration du théorème énoncé, que je me permets de vous communiquer.

En effet, en partant de l'équation (3), nous aurons par intégration

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}\, d\theta \\ &\quad + 2\int_0^{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\mathrm{A}_\lambda \cos\lambda\theta + \mathrm{B}_\lambda \sin\lambda\theta)\, d\theta \\ &= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} \\ &\quad + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_\lambda \int_0^{2\pi} \cos\lambda\theta\, d\theta + \mathrm{B}_\lambda \int_0^{2\pi} \sin\lambda\theta\, d\theta\right) \\ &= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} \\ &\quad + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\mathrm{A}_\lambda \left(\frac{\sin\lambda\theta}{\lambda}\right)_0^{2\pi} + \mathrm{B}_\lambda \left(\frac{-\cos\lambda\theta}{\lambda}\right)_0^{2\pi}\right].\end{aligned}$$

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. XVII et XIX.

[2] *Loc. cit.*, t. XVII, p. 127, éq. (III).

Évidemment chaque terme de la dernière somme, et par suite la somme elle-même, s'évanouit, de sorte que nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r,\theta)|^2\,d\theta=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Voilà le théorème sous forme intégrale. Vous voyez, monsieur, qu'il suffit de supposer que l'intégrale au premier membre a un sens, ce qui est conforme aux conditions de A. Harnack pour les séries trigonométriques.

Considérons encore quelques exemples. D'après la formule (6), nous aurons pour la fonction e^x

$$\mathrm{M}_r|e^x|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(n!)^2},$$

ce qui devient, pour le cercle $|x|=1$,

$$\mathrm{M}_1|e^x|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}.$$

De même nous aurons pour la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ la relation

$$\mathrm{M}_r\left|\sum\frac{x^n}{n^2}\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n^4};$$

par conséquent, la moyenne arithmétique du carré du module de cette série, pour tous les points du cercle $|x|=1$, est égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}.$$

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ possède pour un cercle $|x|=r$ la

moyenne arithmétique $\sum_{0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2^{2n}}$, qui devient, pour $r = \frac{1}{2}$,

$$M_{\frac{1}{2}} \left| \sum \frac{x^n}{2^n} \right|^2 = \sum \frac{1}{2^{4n}} = \frac{16}{15},$$

et pour $r = 1$,

$$\sum \frac{1}{2^{2n}} = \frac{4}{3}.$$

Pour la série

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

il vient

$$M_r \left| \log \frac{1}{1-x} \right|^2 = \sum \frac{r^{2n}}{n^2},$$

où $r < 1$; la même moyenne se trouve pour la fonction

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

car évidemment on a

$$M_r \,|\log(1+x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n^2},$$

où $r < 1$; de sorte que les carrés des modules des deux fonctions $\log(1+x)$ et $\log \frac{1}{1-x}$ ont la même moyenne arithmétique pour les mêmes cercles.

Parmi les conséquences qu'on peut tirer du théorème énoncé, je ne mentionnerai que la suivante. En désignant par q_λ des quantités positives, nous aurons certainement l'inégalité

$$q_\mu^2 + q_\nu^2 > 2 q_\mu q_\nu \qquad (\mu \neq \nu).$$

Formons cette inégalité pour toutes les valeurs de μ, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, $\mu \neq \nu$; nous trouverons facilement,

par addition,

$$(m-1)\sum_{\mu=1}^{m} q_{\mu}^{2} > 2\sum_{\mu,\nu=1}^{m} q_{\mu} q_{\nu} \qquad (\mu \neq \nu).$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité l'expression $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2$; il vient

$$m\sum_{\mu=1}^{m} q_{\mu}^{2} > \left(\sum_{\mu=1}^{m} q_{\mu}\right)^{2}$$

ou

$$\sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^{m} q_{\mu}^{2}\right)} > \frac{\sum_{\mu=1}^{m} q_{\mu}}{\sqrt{m}}.$$

Si nous posons maintenant

$$q_{\mu} = \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right) \right| \qquad \text{et} \qquad m = 2^{n},$$

nous aurons

$$\sqrt{\frac{1}{2^{n}} \sum_{\mu=0}^{2^{n}-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right) \right|^{2}} > \frac{\sum_{\mu=0}^{2^{n}-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right) \right|}{2^{n}},$$

d'où il suit, à l'aide de l'équation (5), pour n infini,

$$\sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}|^{2} r^{2\nu}} > \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{n}} \sum_{\mu=0}^{2^{n}-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{2^{n-1}}{\mu\pi}\right) \right|.$$

A gauche, nous avons une quantité finie et déterminée; par conséquent, la quantité à droite devra être finie, et comme la somme $\sum \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right) \right|$ est cer-

tainement divergente, il faut qu'elle devienne infinie du même ordre que 2^n.

D'autre part, le second membre représente la moyenne arithmétique des valeurs que le module de $f(x)$ parcourt pour le cercle $|x| = r$. Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La moyenne arithmétique des valeurs que le module de la fonction $f(x)$ parcourt pour tous les points du cercle $|x| = r$ est inférieure à la racine carrée de la moyenne arithmétique du carré de ces modules.*

Nous avons donc une limite supérieure de cette moyenne arithmétique; je n'ai pas encore réussi à en trouver une expression exacte par la méthode employée d'abord dans cette lettre.

Pour déterminer cette expression par l'autre méthode, on aurait à former

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a_\mu}\, r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}}\, d\theta.$$

Peut-être reviendrai-je une autre fois à cette expression.

Permettez-moi, monsieur, d'ajouter à ces lignes une nouvelle démonstration du théorème de M. Rouché, cité au commencement de cette lettre. Considérons la fonction

$$\frac{f(x)}{x^k} = \sum a_\nu x^{\nu-k} = \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k}[\cos(\nu-k)\theta + i\sin(\nu-k)\theta];$$

en intégrant, on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^k} d\theta$$

$$= \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \int_0^{2\pi} [\cos(\nu - k)\theta + i \sin(\nu - k)\theta]\, d\theta$$

$$= 2\pi a_k + \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \left\{ \left[\frac{\sin(\nu - k)\theta}{\nu - k} \right]_0^{2\pi} - i \left[\frac{\cos(\nu - k)\theta}{\nu - k} \right]_0^{2\pi} \right\} \qquad (\nu \neq k).$$

Chaque terme de la somme, et par suite la somme elle-même, devient zéro, de sorte que nous avons la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^k} d\theta = a_k,$$

ce qui démontre le théorème de M. Rouché d'une manière nouvelle.

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE RELATIVE A LA CAPILLARITÉ;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

L'ouvrage classique de MM. Jamin et Bouty contient, pour établir la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) F,$$

une démonstration dont le principe est dû à M. Lippmann, mais qui est incorrecte dans les termes où elle est présentée. La Note qui suit a pour objet de rectifier cette démonstration.

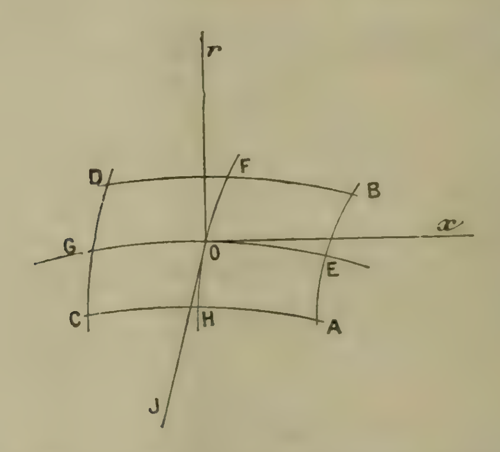
Nous admettons sans discussion l'hypothèse de M. Lippmann. La surface du liquide peut être assimilée à une pel-

licule sans épaisseur, extensible et compressible le long de la surface liquide; découpons fictivement un élément de surface par une ligne fermée : cet élément tendra à se contracter comme une membrane de caoutchouc et, pour le maintenir en équilibre, il faudra appliquer certaines forces tout le long du contour. On admet que la force appliquée à un élément de ligne est, dans le plan tangent à la surface, normale à cet élément et proportionnelle à la longueur ds de cet élément. Elle peut donc être représentée par une expression de la forme

$$F\,ds,$$

F étant un coefficient constant.

Cela posé, étudions les conditions d'équilibre d'un rectangle élémentaire tracé sur la surface. Ce rectangle ne sera pas quelconque comme l'indique la démonstration citée; voici comment nous le déterminerons. Par



un point O de la surface, menons deux lignes de courbure GOE, FOH. Sur la première prenons, à partir du point O, deux longueurs égales OE, OG infiniment petites : en E et en G passent deux lignes de courbure du second système AB, CD. De même, sur la seconde ligne, prenons à partir du point O deux longueurs égales

OF, OH infiniment petites : en F et en H passent deux lignes de courbure du premier système BD, AC. Les quatre lignes AB, BD, DC, CA se coupent à angle droit et limitent un rectangle infiniment petit : nous considérerons ce rectangle comme l'élément de surface dont il a été question. Il est soumis aux tensions superficielles, normales aux quatre côtés, à la pression extérieure normale à la surface, et à la pression intérieure également normale à la surface. Ces dernières pressions sont proportionnelles à l'élément de surface.

Pour établir l'équation d'équilibre, nous prendrons comme axes la normale Oz à la surface au point O et les tangentes Ox, Oy aux deux lignes de courbure.

Soient p la pression extérieure au point O, comptée de z vers O, $p + \Delta p$ la pression intérieure, évaluée dans le sens contraire; la pression extérieure sur l'élément ABCD sera

$$p\,\mathrm{AB}.\mathrm{AC};$$

la pression intérieure sur le même élément,

$$-(p + \Delta p)\,\mathrm{AB}.\mathrm{AC}.$$

La résultante de ces deux forces, dirigée comme elles suivant Oz, sera

$$-\Delta p.\mathrm{AB}.\mathrm{AC}.$$

Pour que l'élément, considéré comme solide, reste en équilibre, il est nécessaire que la somme des projections sur Oz des tensions superficielles et de la résultante précédente soit égale à zéro.

Evaluons ces projections.

La tension normale à AB a pour expression

$$\mathrm{F} \times \mathrm{AB}.$$

Or, en vertu d'un théorème connu sur le déplacement

d'un élément de ligne, AB et FH ne diffèrent que par un infiniment petit du second ordre, et, comme nous aurons à projeter sur Oz, qui est à peu près perpendiculaire sur la direction de cette force, nous négligeons seulement des infiniment petits du troisième ordre, en adoptant pour expression de la tension normale

$$F \times FH.$$

La direction de cette force, qui est tangente en E à la ligne de courbure GOE, fait avec Oz un angle α dont le cosinus a pour valeur principale $\frac{dz}{dx}$. La projection a donc pour expression

$$F \times FH \times \cos\alpha = F \times FH \times \frac{dz}{dx}.$$

La tension normale à CD en G donne aussi

$$F \times FH \times \frac{dz}{dx}.$$

De même les tensions normales à AC et à BD ont pour projections chacune

$$F \times GE \frac{dz}{dy}.$$

L'équation d'équilibre est donc

$$-\Delta p.AB.AC + 2F \times FH \frac{dz}{dx} + 2F \times GE \frac{dz}{dy} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(1) \qquad -\Delta p.FH.GE + 2F \times FH \frac{dz}{dx} + 2F.GE \frac{dz}{dy} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer FH, GE, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Or, avec les axes choisis, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont nuls à l'origine, ainsi que $\frac{d^2z}{dx\,dy}$: l'équation de la surface peut donc s'écrire, en sup-

posant seulement que dans le voisinage de l'origine z puisse être développée en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x et de y,

$$z = ax^2 + by^2 + \ldots,$$

les termes négligés étant du troisième ordre.

Donc

$$\frac{dz}{dx} = 2ax,$$

$$\frac{dz}{dy} = 2by,$$

en s'en tenant aux termes du premier ordre.

D'autre part,

$$\text{FH} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et, comme x et z sont infiniment petits par rapport à y,

$$\text{FH} = 2\sqrt{y^2} = 2y.$$

De même,

$$\text{GE} = 2x.$$

L'équation devient ainsi

$$-\Delta p.4xy + 2\text{F}.2y.2ax + 2\text{F}.2x.2by = 0$$

ou, en simplifiant,

$$-\Delta p + \text{F}.(2a + 2c) = 0.$$

Si l'on appelle R et R′ les rayons de courbure principaux au point O, comme

$$2a = \frac{1}{\text{R}},$$

$$2c = \frac{1}{\text{R}'},$$

on obtient la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{\text{R}} + \frac{1}{\text{R}'}\right)\text{F}.$$

SUR LA TRANSFORMATION ORTHOTANGENTIELLE;

PAR M. E. CESARO.

Une récente Note ([1]) de M. de Longchamps vient d'appeler l'attention sur la *transformation orthotangentielle,* étudiée en 1885 par M. d'Ocagne ([2]) et par d'autres ([3]). Je vais signaler, au moyen des méthodes intrinsèques, une transformation plus générale. Soit (M') la ligne enveloppée par les tangentes à (M), après qu'elles ont tourné du même angle α autour de leurs points de rencontre avec (M_0). Soit θ l'inclinaison de MM_0 sur la tangente à (M_0), en M_0. L'équation de MM_0 est

$$x \sin\theta = y \cos\theta.$$

Sa dérivation par rapport à s_0, faite en supposant

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_0} = \frac{y - \rho_0}{\rho_0}, \qquad \frac{dy}{ds_0} = -\frac{x}{\rho_0},$$

donne

$$(x \cos\theta + y \sin\theta)\left(\frac{d\theta}{ds_0} + \frac{1}{\rho_0}\right) = \sin\theta,$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{1}{h} = \frac{d\theta}{ds_0} + \frac{1}{\rho_0},$$

en désignant par h la longueur du segment déterminé par la normale à (M) sur la normale à (M_0), à partir

---

([1]) *Bulletin de la Société des Sciences de Bohême* (8 juin, 1888).

([2]) *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris, Gauthier-Villars, 1885, Note III).

([3]) *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1885, p. 259, § IV).

de (M_0). On voit que h n'est pas altéré par le changement de θ en $\theta + \alpha$, et l'on en déduit que le lieu instantané des points M', correspondant à M, est la circonférence décrite sur h comme diamètre. En particulier, le point M' de la transformée orthotangentielle est diamétralement opposé à M sur cette circonférence. En d'autres termes, les projections de M et M' sur la tangente à (M_0), en M_0, sont équidistantes de M_0. De même, l'équation de la normale à (M), en M, est

$$x \cos\theta + y \sin\theta = h \sin\theta,$$

et la dérivation donne, en tenant compte des formules (1) et (2),

$$-x \sin\theta + y \cos\theta = h \frac{dh}{ds_0} \sin\theta + \left(2h - \frac{h^2}{\rho_0}\right) \cos\theta.$$

La droite représentée par cette équation doit détacher de la normale à (M_0) un segment $\frac{\rho}{\cos\theta}$. Donc

$$\rho = h \frac{dh}{ds_0} \sin\theta + \left(2h - \frac{h^2}{\rho_0}\right) \cos\theta. \tag{3}$$

Il en résulte que les centres de courbure sont situés sur une circonférence, et que le centre correspondant à la transformée orthotangentielle de (M) est diamétralement opposé, sur cette circonférence, au centre de courbure de (M). Il est facile de se convaincre que ce théorème subsiste pour les centres de courbure de toutes les développées successives des lignes (M) et (M').

Si l'on observe que l'angle de contingence de (M) est $d\theta + \frac{ds_0}{\rho_0}$, on a

$$\frac{ds}{\rho} = \left(\frac{d\theta}{ds_0} + \frac{1}{\rho_0}\right) ds_0 = \frac{ds_0}{h},$$

d'où, en vertu de (3),

$$(4) \qquad s = \int \left[\frac{dh}{ds_0} \sin\theta + \left(2 - \frac{h}{\rho_0} \right) \cos\theta \right] ds_0.$$

Si l'on connaît l'*équation intrinsèque* de (M_0) et l'*équation axiale* de (M), c'est-à-dire les relations existant entre ρ_0, s_0, θ, les équations (3) et (4) font connaître ρ et s en fonction de θ, et l'on en déduit, par élimination de θ, l'équation intrinsèque de (M). L'équation intrinsèque de la transformée orthotangentielle (M′) s'obtient en éliminant θ entre les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho' = h \dfrac{dh}{ds_0} \cos\theta - \left(2h - \dfrac{h^2}{\rho_0} \right) \sin\theta, \\ s' = \displaystyle\int \left[\frac{dh}{ds_0} \cos\theta - \left(2 - \frac{h}{\rho_0} \right) \sin\theta \right] ds_0. \end{cases}$$

Enfin, pour avoir la transformée (M″), relative à une valeur quelconque de l'angle α, il suffit de changer θ en $\theta + \alpha$ dans les équations (3) et (4), ce qui donne, en tenant compte de (5),

$$(6) \qquad \rho'' = \rho \cos\alpha + \rho' \sin\alpha, \qquad s'' = s \cos\alpha - s' \sin\alpha.$$

Soit, par exemple,

$$\rho_0 = R, \qquad \theta = n \frac{s_0}{R}.$$

On a $h = \frac{R}{n+1}$, et les formules (3), (4), (5), (6) conduisent toutes à l'équation

$$(n+1)^2 \rho^2 + n^2 s^2 = \left(\frac{2n+1}{n+1} R \right)^2.$$

Dans ce cas, toutes les lignes (M′) sont égales à l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de diamètre h, roulant sans glisser sur un cercle $2n$ fois plus grand.

On peut dire que (M_0) est la *podaire* de chaque ligne (M) par rapport à sa transformée orthotangentielle. Inversement, cette transformée est l'*antipodaire* de (M_0) par rapport à (M). Il suffit de supposer que (M) se réduit à un point pour retrouver les résultats connus de la *théorie des podaires* proprement dites. On obtient la *théorie des développoïdes* en supposant θ constant, ce qui entraîne $h = \rho_0$. Enfin, pour rentrer dans la théorie des *transformations axiales* proprement dites, il faut supposer que (M_0) soit une droite. Pour ρ_0 infini et $s_0 = \lambda$, les formules (3), (4), (5) deviennent

$$\rho = \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta, \qquad s = \int \rho\, d\theta,$$

$$\rho' = \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta, \qquad s' = \int \rho'\, d\theta.$$

Connaissant l'équation axiale d'une ligne, ces formules donnent, par élimination de θ, l'équation intrinsèque de la même ligne et celle de sa transformée orthotangentielle. Signalons, pour finir, la formule qui donne le rayon de courbure de la $n^{\text{ième}}$ développée d'une ligne quelconque, dont on connaît l'équation axiale. On a

$$\rho_n = u_n \sin\theta + v_n \cos\theta,$$

où

$$\left\{\begin{aligned} u_n &= \frac{d^{n+2}\lambda}{d\theta^{n+2}} - (C_{n+2,2} - 1)\frac{d^n\lambda}{d\theta^n} \\ &\quad + (C_{n+2,4} - C_{n,2})\frac{d^{n-2}\lambda}{d\theta^{n-2}} - \ldots, \\ v_n &= C_{n+2,1}\frac{d^{n+1}\lambda}{d\theta^{n+1}} - (C_{n+2,3} - C_{n,1})\frac{d^{n-1}\lambda}{d\theta^{n-1}} \\ &\quad + (C_{n+2,5} - C_{n,3})\frac{d^{n-3}\lambda}{d\theta^{n-3}} - \ldots. \end{aligned}\right.$$

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \cot(x - \alpha)\,dx$;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

L'intégrale $\int_0^\pi \cot(x - \alpha)\,dx$, qui a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$, a été obtenue par M. Hermite dans son savant *Cours d'Analyse*, p. 344, au moyen d'une construction géométrique, et ensuite dans *Jornal de Sciencias mathematicas*, t. II, p. 65, au moyen d'une méthode entièrement élémentaire. Je me propose ici de considérer la même intégrale, pour l'obtenir par une autre méthode aussi élémentaire, en la faisant dépendre de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,du}{1+[f(x)]^2},$$

Soit $\alpha = a + ib$. On a

$$\begin{aligned}
&\int \cot(x - a - ib)\,dx \\
&\quad = \int \frac{\cos(x - a - ib)}{\sin(x - a - ib)}\,dx \\
&\quad = \int \frac{\cos(x - a)\cos ib + \sin(x - a)\sin ib}{\sin(x - a)\cos ib - \cos(x - a)\sin ib}\,dx,
\end{aligned}$$

où l'on doit remplacer $\sin ib$ et $\cos ib$ par leurs valeurs

$$\cos ib = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2},$$

$$\sin ib = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2i},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int \cot(x-a)\,dx\\
&\quad = \int \frac{(e^{-b}+e^{b})\cos(x-a) - i(e^{-b}-e^{b})\sin(x-a)}{(e^{-b}+e^{b})\sin(x-a) + i(e^{-b}-e^{b})\cos(x-a)}\,dx\\
&\quad = \int \frac{2\sin 2(x-a)\,dx}{e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)}\\
&\qquad - i\int \frac{(e^{-2b}-e^{2b})\,dx}{(e^{-b}+e^{b})^2\sin^2(x-a)+(e^{-b}-e^{b})^2\cos^2(x-a)}\\
&\quad = \frac{1}{2}\log[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos(x-a)]\\
&\qquad - i\int \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]^2}.
\end{aligned}$$

Mais, comme on a $e^{-2b}+e^{2b}>2$, la fonction

$$\log[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)]$$

a une branche réelle qui prend des valeurs égales dans les points $x=0$ et $x=\pi$. Donc

$$\int_0^{\pi}\cot(x-a)\,dx = -i\int_0^{\pi}\frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]^2}.$$

L'intégrale qui entre dans le second membre de cette égalité a la forme

$$\int_0^{\pi}\frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2},$$

et nous allons par conséquent lui appliquer le théorème

$$\int_0^{\pi}\frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2} = \operatorname{arc\,tang} f(\pi) - \operatorname{arc\,tang} f(0) - (n+m)\pi,$$

où n représente le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du positif au négatif, et m le nombre

de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du négatif au positif.

En y posant donc

$$f(x) = \frac{e^{-b} + e^{b}}{e^{-b} - e^{b}} \operatorname{tang}(x - \alpha),$$

et en remarquant que, quand x varie depuis zéro jusqu'à π, $\operatorname{tang}(x - \alpha)$ passe une seule fois par l'infini en allant du positif au négatif et que la fraction

$$\frac{e^{-b} + e^{b}}{e^{-b} - e^{b}}$$

est positive ou négative suivant que $b < 0$ ou > 0, on voit que $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif quand $b < 0$, et du négatif au positif quand $b > 0$.

Nous avons donc

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha)\, dx = - i\pi$$

quand $b > 0$, et

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha)\, dx = - i\pi$$

quand $b < 0$.

ÉTUDE DU COMPLEXE PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885;

PAR M. E. MARCHAND.

Dans un précédent article, après avoir résolu la question telle qu'elle était énoncée, je me suis borné à indi-

quer sans démonstration quelques résultats complémentaires faciles à établir au moyen des coordonnées cartésiennes.

Je me propose aujourd'hui de parvenir aux mêmes conséquences en faisant appel presque exclusivement aux coordonnées homogènes de la ligne droite.

1. *Complexe spécial.* — Désignant toujours par α, β, γ, α', β', γ' les six coordonnées de la droite Δ, je trouverai pour expression de la plus courte distance δ entre cette droite et une droite Δ_1 faisant l'angle φ avec elle,

(1) $$\delta \sin\varphi = \alpha'_1\alpha + \beta'_1\beta + \gamma'_1\gamma + \alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' + \gamma_1\gamma'.$$

Ceci rappelé, le complexe du premier ordre

(2) $$A\alpha + B\beta + C\gamma + A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma' = 0$$

sera dit spécial si son invariant est nul :

(3) $$AA' + BB' + CC' = 0.$$

L'identité (3) s'interprète géométriquement; elle indique que $\alpha_1 = A'$, $\beta_1 = B'$, $\gamma_1 = C'$, $\alpha'_1 = A$, $\beta'_1 = B$, $\gamma'_1 = C$ sont les six coordonnées d'une droite fixe Δ_1.

D'après (1) l'équation (2) signifie que toute droite Δ du complexe rencontre la droite Δ_1.

Un complexe spécial est l'ensemble des droites Δ qui rencontrent une droite fixe Δ_1.

A tout point correspond relativement à un complexe du premier ordre un plan que Chasles appelle *le plan focal du point*. Il est facile de vérifier que si un point mobile décrit une droite du complexe d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le plan focal du point tourne autour de la droite d'une manière continue de 180°. Il suffit pour cela de prendre cette droite comme axe des z.

Il n'y a d'exception que si le complexe est spécial. La droite Δ choisie parmi celles du complexe rencontre en N la droite Δ_1 définie par ce complexe.

Le plan focal d'un point quelconque de Δ est toujours le plan $\Delta\Delta_1$; le plan focal de N est indéterminé.

2. *Complexe tangent.* — Soit maintenant un complexe quelconque d'ordre m

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0. \tag{4}$$

Pour une droite $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ du complexe on aura l'identité

$$f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1) = 0. \tag{5}$$

Pour une droite voisine appartenant au complexe,

$$f(\alpha_1 + d\alpha_1, \ldots) = f(\alpha_1, \ldots) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \ldots\right) + \ldots = 0.$$

Finalement on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1} d\gamma'_1 = 0. \tag{6}$$

Ajoutant au premier membre de (6) le premier membre de (5) écrit sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1} \gamma'_1 = 0,$$

on trouve finalement

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial \alpha'_1} + \beta' \frac{\partial f}{\partial \beta'_1} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1} = 0, \tag{7}$$

$$f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1) = 0. \tag{5}$$

Relativement à toute droite Δ_1 du complexe on trouve un pareil complexe linéaire (7) que j'appellerai *com-*

plexe tangent. Pour justifier cette dénomination, je vais démontrer le résultat suivant :

Le plan focal d'un point S de la droite Δ_1 du complexe (4) est le plan tangent le long de Δ_1 au cône du complexe de sommet S.

En effet, la droite Δ_1 étant définie par un point fixe $M_1(x, y, z, t)$ et par un point mobile $S(x', y', z', t')$, le plan focal de S relativement au complexe (7) sera défini par (7) en supposant la droite $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ déterminée par les points $S(x, y', z', t')$ et $M(x, y, z, t)$.

Le plan tangent en M_1 au cône du complexe dont (4) est l'équation en coordonnées multiplanaires est précisément déterminé par les équations (7) et (5).

Corrélativement le foyer d'un plan P mené par la droite Δ_1 du complexe relativement au complexe tangent (7) est le point de contact de la courbe du complexe relative au plan P avec la droite Δ_1.

Les droites du complexe peuvent alors se diviser en deux groupes.

On a, d'une part, les droites ordinaires du complexe caractérisées par ce fait que le complexe tangent n'est pas spécial. Le plan tangent au cône du complexe tournera de $180°$ quand le sommet décrira la droite ordinaire du complexe de $-\infty$ à $+\infty$.

On a, d'autre part, les droites singulières D pour lesquelles le complexe tangent est spécial. Le plan tangent est le même pour tout cône ayant son sommet sur D; c'est le plan de la droite D et de la droite D' définie par le complexe tangent spécial. Il n'y a d'exception que pour le point N d'intersection de D et D'.

Ainsi on est conduit à adjoindre à la droite singulière D un plan singulier DD' et un point singulier N.

Corrélativement le point de contact avec la droite singulière est le point singulier N pour tout plan pas-

sant par cette droite singulière. Il n'y a d'exception que pour le plan singulier associé.

Exactement comme dans la théorie des points doubles des courbes algébriques on trouvera que pour le point singulier N il faut remplacer l'équation (7) par

$$(8) \qquad \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta_1} + \ldots\right)^2 f = 0.$$

Le cône admet la droite singulière comme droite double, les deux plans tangents le long de cette droite double étant représentés par l'équation (8).

Corrélativement la génératrice singulière est tangente double pour la courbe du complexe située dans le plan singulier associé. Les deux points de contact sont déterminés encore par l'équation (8).

Si le complexe est du second ordre, comme dans l'équation actuelle, l'équation (8) coïncide avec l'équation (4) du complexe. Le cône relatif au point singulier associé se décompose en deux plans; la conique relative au plan singulier associé se décompose en deux points.

On prouvera alors sans difficulté que les droites singulières du complexe sont les génératrices doubles des cônes du complexe admettant une génératrice double, ou encore les tangentes doubles des courbes du complexe qui en admettent.

Les points singuliers associés sont les sommets des cônes admettant une génératrice double; les plans singuliers associés, les plans des courbes admettant une tangente double.

Dans le cas actuel, chercher le lieu des points singuliers associés et l'enveloppe des plans singuliers associés revient à chercher d'une part le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans.

d'autre part l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe du complexe se réduit à deux points.

3. *Droites singulières.* — Les droites singulières seront définies par les équations

$$(9)\qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha'} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \beta'} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma'} = 0.$$

Dans le cas actuel on aura les deux équations

$$(9)\qquad l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 - \mathrm{K}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

$$(10)\qquad l\alpha\alpha' + m\beta\beta' + n\gamma\gamma' = 0.$$

On a une congruence du quatrième ordre et de quatrième classe.

L'équation (10) se reconnaît aussitôt. C'est le complexe des droites perpendiculaires à leur polaire relativement à toutes les surfaces du second degré

$$\frac{x^2}{l+\rho} + \frac{y^2}{m+\rho} + \frac{z^2}{n+\rho} = \sigma,$$

ρ et σ étant des paramètres arbitraires. L'une de ces surfaces est le cône

$$(11)\qquad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0,$$

qui intervenait si heureusement dès le début du problème.

Ce résultat s'explique aussitôt. La conique du complexe relative à un plan P est homofocale à la section Σ de ce cône (11) par le plan P. Si donc la conique se réduit à deux points, ce qui n'arrive que pour les plans singuliers associés, ces deux points sont deux foyers de Σ; la droite singulière qui les joint est un axe; or on sait que tout axe de section plane est une droite perpen-

diculaire à sa polaire et que toute droite perpendiculaire à sa polaire est un axe de section plane.

Les propriétés connues du complexe (10) fournissent aussitôt des propriétés des droites singulières du complexe. Le rapport anharmonique intercepté sur une droite singulière par les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini est constant. Ces quatre plans forment un tétraèdre tel que toute autre droite située dans le plan d'une face appartienne au complexe (10), que toute droite passant par un sommet appartienne au complexe (10).

Toutes les droites du complexe donné (9) situées dans un des plans de coordonnées seront singulières. Or on a vu que pour tout plan passant par l'origine on avait un cercle. Les droites du complexe situées dans un des plans de coordonnées envelopperont le cercle déterminé par ce plan de coordonnées dans la surface des ondes qui sera trouvée plus loin.

Toutes les droites du complexe (9) passant par l'origine ou parallèles à un des axes sont aussi des droites singulières.

4. *Congruence des droites singulières.* — Les droites singulières formant une congruence, une première méthode que je ne ferai qu'esquisser consisterait à leur appliquer les théorèmes généraux relatifs aux foyers, aux plans focaux et aux surfaces focales des congruences.

Je rappellerai que les foyers d'une congruence sont définis par (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, par G. Darboux, t. II, p. 3)

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

Les projections d'une droite sur les trois plans de coordonnées ayant pour équations

$$\gamma y - \beta z = \alpha',$$
$$\alpha z - \gamma x = \beta',$$
$$\beta x - \alpha y = \gamma',$$

les équations (9) et (10) deviennent

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} l(\gamma y - \beta z)^2 + m(\alpha z - \gamma x)^2 \\ \quad + n(\beta x - \alpha y)^2 - \mathrm{K}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0, \end{array}\right.$$

$$(13)\quad l\alpha(\gamma y - \beta z) + m\beta(\alpha z - \gamma x) + n\gamma(\beta x - \alpha y) = 0.$$

A ces équations il faudra joindre

$$(14)\qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \gamma}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma}}.$$

Or, si je regarde α, β, γ comme des coordonnées courantes et x, y, z comme des paramètres constants, les équations (12), (13) et (14) reviennent à exprimer que les coniques représentées par les deux premières équations sont tangentes.

Posant, suivant l'usage,

$$(12)\qquad S = 0,$$
$$(13)\qquad S' = 0,$$

on vérifie facilement que l'invariant Θ est nul. Alors la condition de contact (Salmon, *Sections coniques*, p. 573) se réduit à

$$\Delta(27\Delta\Delta' + 4\Theta'^3) = 0.$$

On a d'abord $\Delta = 0$, c'est-à-dire la condition pour que $S = 0$ représente deux droites. Effectuant le calcul, on trouverait la surface des ondes, que nous retrouverons plus loin par un calcul presque identique. On a en plus

une surface d'ordre élevé

$$27\Delta\Delta' + 4\Theta'^3 = 0.$$

Cette surface rencontre la surface des ondes en des points

$$\Delta = 0, \qquad \Theta' = 0,$$

formant une courbe gauche d'ordre 16, sur lesquels l'attention se trouve tout naturellement attirée.

Mais je laisserai de côté ces considérations, qui ne se rattachent pas étroitement à la marche suivie jusqu'ici.

5. *Point et plan singuliers.* — Le complexe tangent est ici

$$l\alpha'\alpha'_1 + m\beta'\beta'_1 + n\gamma'\gamma'_1 - K(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = 0.$$

Si ce complexe est spécial, la droite D′ qu'il représente a pour coordonnées $l\alpha'_1$, $m\beta'_1$, $n\gamma'_1$, $-K\alpha_1$, $-K\beta_1$, $-K\gamma_1$, les coordonnées de la droite singulière D étant α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1.

Alors, si x, y, z sont les coordonnées rectilignes du point N intersection de D et de D′, on aura les deux séries d'équations

$$(16)\qquad \begin{cases} \gamma_1 y - \beta_1 z = \alpha'_1, \\ \alpha_1 z - \gamma_1 x = \beta'_1, \\ \beta_1 x - \alpha_1 y = \gamma'_1, \end{cases}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} n\gamma'_1 y - m\beta'_1 z = -K\alpha_1, \\ l\alpha'_1 z - n\gamma'_1 x = -K\beta_1, \\ m\beta'_1 x - l\alpha'_1 y = -K\gamma_1, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z = 0,$$

$$(19)\qquad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0.$$

Les équations (18) et (19) déterminent des valeurs proportionnelles de x, y, z. Il est d'ailleurs facile de vérifier que les équations (16), (17), (18) et (19) sont

vérifiées par

$$(20)\quad x = \beta\gamma' - \gamma\beta', \qquad y = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \qquad z = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

en supposant, bien entendu,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Les formules corrélatives qui déterminent le plan singulier associé sont

$$(21)\quad \begin{cases} \gamma' v - \beta' w = \alpha, \\ \alpha' w - \gamma' u = \beta, \\ \beta' u - \alpha' v = \gamma, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} -K(\gamma v - \beta w) = l\alpha', \\ -K(\alpha w - \gamma u) = m\beta', \\ -K(\beta u - \alpha v) = n\gamma', \end{cases}$$

$$(23)\quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

$$(24)\quad l\alpha' u + m\beta' v + n\gamma' w = 0.$$

Ici encore il est facile de constater que l'on vérifie toutes les équations, en posant

$$(25)\quad -Ku = n\beta\gamma' - m\gamma\beta'.$$

Si l'on multiplie par α, β, γ les premiers membres des équations (21) et qu'on ajoute, il vient

$$(26)\quad ux + vy + wz + 1 = 0.$$

On vérifie donc ce résultat, évident par ce qui précède, que le point singulier est dans le plan associé.

De (26) on tire aussitôt

$$(27)\quad u\,dx + v\,dy + w\,dz + x\,du + y\,dv + z\,dw = 0.$$

Je différentie totalement les équations (16) et (17) et je les ajoute multipliées par les facteurs écrits en

regard

$$\begin{array}{ll}
\gamma\, dy - \beta\, dz + y\, d\gamma - z\, d\beta = d\alpha', & -l\alpha', \\
\alpha\, dz - \gamma\, dx + z\, d\alpha - x\, d\gamma = d\beta', & -m\beta', \\
\beta\, dx - \alpha\, dy + x\, d\beta - y\, d\alpha = d\gamma', & -n\gamma', \\
n\gamma'\, dy - m\beta'\, dz + ny\, d\gamma' - mz\, d\beta' = -K\, d\alpha, & \alpha, \\
l\alpha'\, dz - n\gamma'\, dx + lz\, d\alpha' - nx\, d\gamma' = -K\, d\beta, & \beta, \\
m\beta'\, dx - l\alpha'\, dy + mx\, d\beta' - ly\, d\alpha' = -K\, d\gamma, & \gamma.
\end{array}$$

J'obtiens

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} +2K(u\, dx + v\, dy + w\, dz) \\ \quad + K(x\, du + y\, dv + z\, dw) = 0. \end{array} \right.$$

Des équations (27) et (28) on tire

$$(29) \quad u\, dx + v\, dy + w\, dz = 0,$$

$$(30) \quad x\, du + y\, dv + z\, dw = 0.$$

La première montre que la surface lieu des points associés admet le plan associé comme plan tangent; la deuxième montre que l'enveloppe des plans singuliers associés admet le point singulier associé comme point de contact avec son enveloppe.

On voit donc qu'il existera une surface singulière lieu des points singuliers et enveloppe des plans singuliers à laquelle toutes les droites singulières seront tangentes.

Il est facile de se rendre compte que la même surface sera aussi le lieu des points en lesquels peut se décomposer la conique du complexe et l'enveloppe des plans auxquels peut se réduire le cône.

En effet, si par la droite singulière on mène les deux plans qui forment le cône relatif au point singulier N, la courbe du complexe relative à l'un de ces plans se compose évidemment du point N et d'un autre point. C'est un plan singulier, tangent par suite à la surface singulière. De même le cône relatif à l'un des points M

en lesquels se décompose la conique située dans un plan singulier contenant déjà toutes les droites du plan singulier passant par M se réduit à ce plan et à un autre plan.

Il paraît dès lors naturel de penser que la surface singulière sera de quatrième ordre et de quatrième classe. Une droite singulière rencontre en effet la surface au point singulier associé qui doit compter double et aux deux points auxquels se réduit la conique correspondante au plan singulier associé. Par la droite singulière on peut mener quatre plans tangents dont deux confondus avec le plan singulier et les deux autres fournis par les deux plans auxquels se réduit le cône qui a pour sommet le point singulier associé.

Je ne m'arrêterai pas à établir rigoureusement ce résultat par la Géométrie et j'arrive aussitôt à la recherche de l'équation de la surface singulière.

6. *Surface singulière.* — Éliminant α, β, γ, α', β', γ' entre les six équations homogènes (16) et (17), on aurait l'équation de la surface singulière sous forme d'un déterminant du sixième ordre.

Je tirerai les valeurs de α, β, γ des équations (17) et, portant dans (16), j'aurai trois équations de la forme

$$\alpha'[l(y^2+z^2)-\mathrm{K}]-\beta' mxy-\gamma' nzx=0. \tag{31}$$

Posant

$$l\alpha'=\mathrm{X},\qquad m\beta'=\mathrm{Y},\qquad n\gamma'=\mathrm{Z},$$

les équations (31) sont les dérivées partielles de la forme quadratique

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{AX}^2+\mathrm{A'Y}^2+\mathrm{A''Z}^2+2\mathrm{BYZ}+2\mathrm{B'ZX}+2\mathrm{B''XY}=0\\ \mathrm{A}=y^2+z^2-\dfrac{\mathrm{K}}{l},\qquad \mathrm{B}=-yz.\end{array}\right. \tag{32}$$

Le discriminant de cette forme quadratique doit être nul. Je l'écrirai sous la forme de Jacobi

$$\frac{\frac{B'B''}{B}}{A - \frac{B'B''}{B}} + \ldots + 1 = 0.$$

On trouve la forme bien connue de l'équation de la surface des ondes

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-\frac{K}{l}} \\ &+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-\frac{K}{m}} \\ &+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-\frac{K}{n}} - 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on avait au contraire éliminé α', β', γ' entre les équations (16) et (17), on obtiendrait trois équations du premier degré en α, β, γ qui ne seraient autre chose que les dérivées partielles de la forme quadratique (12) trouvée plus haut. Le rapprochement avec le calcul indiqué par la théorie des foyers des congruences est très net, mais on trouverait une forme moins simple pour la surface des ondes

$$(34) \qquad \frac{mnx^2}{T-Kl} + \frac{nly^2}{T-Km} + \frac{lmz^2}{T-Kn} - 1 = 0,$$

$$T = lmn\left(\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n}\right).$$

$T = 0$ est le cône (11) qui avec la sphère de rayon nul $x^2+y^2+z^2 = 0$ compose le cône asymptote de la surface des ondes.

Opérant de même avec les équations (21) et (22), on

trouve les deux formes corrélatives de l'équation de la surface des ondes :

$$(35)\qquad \frac{u^2}{\rho^2 - l} + \frac{v^2}{\rho^2 - m} + \frac{w^2}{\rho^2 - n} - 1 = 0,$$

$$\rho^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

$$(36)\qquad \frac{lu^2}{KU - mn} + \frac{mv^2}{KU - nl} + \frac{nw^2}{KU - lm} - 1 = 0,$$

$$U = lu^2 + mv^2 + nw^2.$$

7. *Conséquences géométriques.* — Je me borne au cas où l'on a une véritable surface des ondes :

$$l > 0, \qquad m > 0, \qquad n > 0.$$

Prenons un point M de la surface des ondes et le plan tangent T en ce point. Je dis que la droite singulière unique qui passe par le point M dans le plan T est perpendiculaire à la droite OM qui joint le point de contact M à l'origine des coordonnées. En effet, on a vu dans la première Partie que les plans tangents menés par OM au cône (11) étaient deux plans de section circulaire; OM est donc un axe. Lorsqu'on a deux plans au lieu d'un vrai cône, ces deux plans doivent former un des deux autres systèmes de plans cycliques qui résultent forcément du premier système. L'intersection de ces deux plans ou la droite singulière est aussi un axe; elle est perpendiculaire à OM. Cette perpendiculaire D menée à OM dans le plan T est tangente à la parabole (10) du complexe associé. Elle rencontre la surface des ondes en deux autres points qui sont foyers de la section du cône (11) par le plan T; ce sont en effet les deux points en lesquels se décompose la conique du complexe qui est homofocale de la section du cône.

On peut mener par D deux autres plans tangents à la surface : ce sont les deux plans de l'un des deux systèmes

cycliques résultant d'un premier système cyclique formé par les plans tangents menés par OM au cône (11). Le cône étant ici imaginaire, les plans tangents sont imaginaires et alors, des deux systèmes cycliques entre lesquels il faut choisir, l'un est réel, l'autre imaginaire.

D'après la forme connue de la surface des ondes, si le point M est sur la nappe intérieure, les deux points d'intersection de D avec la surface sont réels : la conique se réduit aux deux foyers réels. Par contre, les deux plans tangents menés par D étant imaginaires, le cône du sommet M se réduit aux deux plans cycliques imaginaires. Si le point M est sur la nappe extérieure, les deux foyers sont imaginaires et les plans cycliques réels. On remarquera en passant les relations étroites qui existent entre la surface des ondes et les foyers des sections planes du cône, lequel deviendrait un cône quelconque du second ordre, si on laissait arbitraires les signes de l, m, n.

Toute section menée par une droite singulière D est tangente à cette droite au point singulier M. D'ailleurs, dans un plan quelconque, il y a quatre droites singulières définies par les équations (9) et (10) comme tangentes communes à la conique du complexe et à une parabole. La conique du complexe relative à un plan quelconque est tangente en quatre points à la section de la surface des ondes par le plan. De même, tout cône du complexe est tangent en quatre points à la surface singulière. Cette propriété de la conique du complexe d'être tangente à la surface singulière en chacun des quatre seuls points où elle la rencontre s'applique évidemment à tout complexe du second ordre.

Si l'on coupe la surface des ondes par un plan passant par l'origine des coordonnées, la courbe du complexe correspondante est un cercle C. La surface des ondes est

coupée suivant deux courbes : l'une intérieure, I; l'autre extérieure E.

Les tangentes menées au cercle C par un point M de E sont évidemment les intersections du plan du cercle avec les deux plans auxquels se réduit le cône de sommet M, puisque ces droites appartiennent au complexe. Ces tangentes sont réelles puisque les deux plans sont réels. Les tangentes seraient par contre imaginaires pour un point quelconque de la courbe intérieure I. Alors la courbe I est intérieure au cercle C et la courbe E lui est extérieure. Les droites du complexe situées dans le plan étant les tangentes au cercle C rencontrent E en deux points réels et I en deux points imaginaires.

Comme toute droite du complexe appartient à un plan passant par l'origine, on voit que toutes les droites du complexe pénètrent entre les deux nappes de la surface des ondes. La nappe intérieure de la surface des ondes forme un noyau solide à l'intérieur duquel ne pénètre aucune droite du complexe.

Les courbes E et I se confondent pour les plans qui touchent la surface des ondes en tous les points d'un cercle. Ce cercle de contact est donc une conique du complexe; son plan coupe le cône (11) suivant un cercle qui a même centre que le cercle de contact. Corrélativement les cônes tangents aux points doubles sont des cônes du complexe; on connaît donc leurs plans de section circulaire, et par suite leurs axes.

Pour être complet, il resterait à chercher l'équation de la surface singulière en coordonnées de droite, ce qui conduirait à un grand nombre de propriétés intéressantes appartenant pour la plupart au complexe général du second ordre.

LIEU DES POINTS D'UN SOLIDE QUI PARTAGENT AVEC LE CENTRE DE GRAVITÉ L'UNE DE SES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Soit S un solide de masse M, animé d'un mouvement connu. M. Gilbert a déterminé (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 novembre 1885) le lieu des points A du solide tels qu'à un instant donné la force vive de S soit égale à la somme de la force vive d'une masse M concentrée au point A et de la force vive du solide dans son mouvement relatif à des axes menés par A dans des directions fixes : le lieu est un cylindre de révolution; l'axe de Mozzi et la parallèle menée par le centre de gravité G en sont deux génératrices diamétralement opposées. On peut se demander quels sont les points B du solide qui partagent *momentanément* avec le point G une autre de ses propriétés dynamiques, savoir qu'à un instant donné le moment de la quantité de mouvement de S par rapport à un axe HH′ soit égal au moment, par rapport au même axe, de la quantité de mouvement d'une masse M concentrée au point B, augmenté du moment de la quantité de mouvement du solide par rapport à un axe BB′ parallèle à HH′, quand on considère le mouvement de S relativement à des axes menés par B dans des directions fixes. Dans une Note, dont le résumé a été donné dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 17 décembre 1888, j'ai dit que le lieu des points B est un hy-

perboloïde : un calcul simple et direct permet de s'en assurer.

Par un point O qui, à l'instant donné, coïncide avec G, menons trois axes rectangulaires fixes dont l'un, OZ, soit parallèle à HH', et soient

$x=\lambda$, $y=\mu$ les équations de HH';
x, y, z les coordonnées d'un élément m;
α, β, γ celles de l'un des points B;
v_x, v_y, v_z; φ_x, φ_y, φ_z les composantes de la vitesse : 1° de l'élément m; 2° du point considéré B.

On doit avoir

$$\begin{aligned}\Sigma m[(x-\lambda)v_y-(y-\mu)v_x] \\ =[(\alpha-\lambda)\varphi_y-(\beta-\mu)\varphi_x]\Sigma m \\ +\Sigma m[(x-\alpha)(v_y-\varphi_y)-(y-\beta)(v_x-\varphi_x)],\end{aligned}$$

ou, en faisant de simples réductions,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma m(\mu v_x-\lambda v_y) \\ &\quad=\Sigma m[\beta v_x-\alpha v_y+(2\alpha-x-\lambda)\varphi_y-(2\beta-y-\mu)\varphi_x].\end{aligned}\right.$$

A l'instant donné, le mouvement de S résulte d'une translation dont la vitesse V est celle du point G, et d'une rotation ω autour d'un axe instantané GG' qu'on peut supposer dans le plan des xz; soient a, b, c les composantes de V suivant les axes; celles de ω seront de la forme p, o, r, et l'on aura

$$\begin{aligned}v_x&=a-ry, & v_y&=b+rx-pz, & v_z&=c+py,\\ \varphi_x&=a-r\beta, & \varphi_y&=b+r\alpha-p\gamma, & \varphi_z&=c+p\beta.\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), et observons que Σmx, Σmy, Σmz sont nuls parce que le centre de gravité est à l'origine : on peut diviser par Σm ou M, et l'on trouve que les coordonnées du point B doivent

satisfaire à l'équation

$$2r(\alpha^2+\beta^2)-2p\alpha\gamma+(b-\lambda r)\alpha-(a+\mu r)\beta+\lambda p\gamma=0 :$$

le lieu du point B est donc un hyperboloïde qui, naturellement, dépend de plus de paramètres que le cylindre de M. Gilbert. Le cône des directions asymptotiques ne dépend toutefois que des directions de HH' et de l'axe de Mozzi : ce sont les directions de deux génératrices du cône situées dans un de ses plans principaux, et les plans cycliques du cône, comme ceux de l'hyperboloïde, leur sont perpendiculaires. On trouve que les génératrices de l'hyperboloïde, parallèles à OZ, sont réelles ou imaginaires et, par conséquent, que l'hyperboloïde est à une ou deux nappes, suivant qu'on a

$$(a+\mu r)^2-4b\lambda r \gtrless 0,$$

c'est-à-dire suivant que la droite HH' est extérieure ou intérieure à un certain cylindre parabolique dont les génératrices lui sont parallèles.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOFF.

Soient

$$x=f_\nu(m),\qquad x=f_\nu(m_0)=x_0,\qquad x=f_\nu(0)=r$$

les racines respectives des équations

$$f(x)-m=0,\qquad f(x)-m_0=0,\qquad f(x)=0,$$

de sorte qu'on ait identiquement

$$f[f_\nu(m)]=m,\qquad f(x_0)=m_0,\qquad f(r)=0;$$

et

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx$$

une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $m - m_0$.

En posant, pour abréger,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \mathrm{D}_x f(x), \qquad \frac{\mathrm{F}(x)}{f'(x)} = \Phi(x),$$

on a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{F}(x)}{f'(x)}\,df(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\,df(x)$$
$$= \int_{m_0}^{m} \Phi[f_v(m)]\,df[f_v(m)] = \int_{m_0}^{m} \Phi[f_v(m)]\,dm.$$

Au moyen des formules bien connues

$$\int_{m_0}^{m} \Psi'(m)\,dm = \Psi(m) - \Psi(m_0),$$

$$\Psi(m) - \Psi(m_0) = (m - m_0)\,\Psi'(m_0) + \frac{(m - m_0)^2}{1.2}\Psi''(m_0) + \ldots + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\Psi^{n-1}(m_0) + \frac{(m - m_0)^n}{1.2\ldots n}\Psi^n[m_0 + \theta(m - m_0)],$$

on obtient

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{m_0}^{m} \Phi[f_v(m)]\,dm$$
$$= (m - m_0)\,\Phi[f_v(m_0)] + \frac{(m - m_0)^2}{1.2}\mathrm{D}_y \Phi[f_v(y)]_{y=m_0} + \ldots + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mathrm{D}_y^{n-2}\,\Phi[f_v(y)]_{y=m_0} + \mathrm{R}_n$$
$$= (m - m_0)\,\Phi(x_0) + \frac{(m - m_0)^2}{1.2}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}\mathrm{D}_z\right]\Phi(z)\right\}_{z=x_0} + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}\mathrm{D}_z\right]^2\Phi(z)\right\}_{z=x_0} + \ldots + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}\mathrm{D}_z\right]^{n-2}\Phi(z)\right\}_{z=x_0} + \mathrm{R}_n.$$

où

$$R_n = \frac{(m-m_0)^n}{1.2.3\ldots n}\left\{ D_y^{n-1}\Phi[f_\nu(y)]\right\}_{y=m_0+\theta(m-m_0)}$$
$$= \frac{(m-m_0)^n}{1.2.3\ldots n}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{n-1}\Phi(z)\right\}_{z=x_0+\theta_1(x-x_0)=f_\nu[m_0+\theta(m-m_0)]}.$$

De cette formule, on déduit aussi la série suivante

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_r^x F(x)\,dx - \int_r^{x_0} F(x)\,dx$$
$$= \int_0^m \Phi[f_\nu(m)]\,dm - \int_0^{m_0}\Phi[f_\nu(m)]\,dm$$
$$= (m-m_0)\Phi(r) + \frac{(m^2-m_0^2)}{1.2}\left\{\frac{1}{f'(z)}D_z\Phi(z)\right\}_{z=r}$$
$$+ \frac{(m_3-m_0^3)}{1.2.3}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^2\Phi(z)\right\}_{z=r} + \ldots$$
$$+ \frac{(m^{n-1}-m_0^{n-1})}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{n-2}\Phi(z)\right\}_{z=r} + R'_n,$$

où

$$R'_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(m^n\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{n-1}\Phi(z)\right\}_{z=r+\theta(x-r)}\right.$$
$$\left. - m_0^n\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{n-1}\Phi(z)\right\}_{z=r+\theta_1(x_0-z)}\right).$$

Exemple. — En prenant les logarithmes népériens, posons

$$f(x) = \log x = m, \qquad F(x) = \log x.$$

Alors

$$\log x_0 = m_0, \qquad r = 1, \qquad \frac{F(x)}{f'(x)} = \Phi(x) = x\log x,$$
$$\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^n\Phi(z) = (z\,D_z)^n z\log z = z(n+\log z),$$
$$[(z\,D_z)^n z\log z]_{z=r=1} = n,$$

$$R_n = \frac{(m-m_0)^n}{1.2.3\ldots n}\left([x_0+\theta(x-x_0)]\{n-1+\log[x_0+\theta(x-x_0)]\}\right),$$

$$R'_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(m^n[1+\theta(x-1)]\{n-1+\log[1+\theta(x-1)]\}\right.$$
$$\left. - m_0^n[1+\theta_1(x_0-1)]\{n-1+\log[1+\theta_1(x_0-1)]\}\right).$$

---

(1) *Nouvelles Annales*, août 1888, p. 362.

Comme $R_{n=\infty}=0$ et $R'_{n=\infty}=0$ pour les valeurs finies de m et m_0, on a

$$\int_{x_0}^{x}\log x\,dx = x_0\Big[(m-m_0)\log x_0+\frac{(m-m_0)^2}{1.2}(1+\log x_0)$$
$$+\frac{(m-m_0)^3}{1.2.3}(2+\log x_0)+\frac{(m-m_0)^4}{1.2.3.4}(3\log x_0)+\ldots\Big]$$
$$=x_0(m-m_0)^2\Big[\frac{1}{2}+\frac{(m-m_0)}{1}\frac{1}{3}$$
$$+\frac{(m-m_0)^2}{1.2}\frac{1}{4}+\frac{(m-m_0)^3}{1.2.3}\frac{1}{5}+\ldots\Big]$$
$$+x_0\log x_0\Big[(m-m_0)+\frac{(m-m_0)^2}{1.2}+\frac{(m-m_0)^3}{1.2.3}+\ldots\Big]$$
$$=x_0[e^{m-m_0}(m-m_0)-(e^{m-m_0}-1)]+x_0\log x_0(e^{m-m_0}-1)$$
$$=(x\log x-x)-(x_0\log x_0-x_0),$$

et aussi

$$\int_{x_0}^{x}\log x\,dx=(m^2-m_0^2)\frac{1}{2}+\frac{(m^3-m_0^3)}{1}\frac{1}{3}$$
$$+\frac{(m^4-m_0^4)}{1.2}\frac{1}{4}+\frac{(m^5-m_0^5)}{1.2.3}\frac{1}{5}+\ldots$$
$$=m^2\Big[\frac{1}{2}+\frac{m}{1}\frac{1}{3}+\frac{m^2}{1.2}\frac{1}{4}+\frac{m^3}{1.2.3}\frac{1}{5}+\ldots\Big]$$
$$-m_0^2\Big[\frac{1}{2}+\frac{m_0}{1}\frac{1}{3}+\frac{m_0^2}{1.2}\frac{1}{4}+\frac{m_0^3}{1.2.3}\frac{1}{5}+\ldots\Big]$$
$$=[e^m m-(e^m-1)]-[e^{m_0}m_0-(e^{m_0}-1)]$$
$$=[e^m(m-1)+1]-[e^{m_0}(m_0-1)+1]$$
$$=(x\log x-x)-(x_0\log x_0-x_0).$$

SOLUTION DE LA QUESTION 1570, PROPOSÉE PAR M. ROUCHÉ;

Par M. WORONTZOFF.

Étant donnée la relation

$$\sin(x-y)=m\sin(x+y),$$

dans laquelle m désigne un nombre donné dont la valeur absolue est inférieure à 1, développer y en série suivant les puissances croissantes de m, et indiquer la forme du reste lorsqu'on ne prend qu'un nombre limité de termes (¹).

De l'équation donnée

$$\sin(x-y) = m\sin(x+y) = m\sin[2x-(x-y)],$$

on déduit

$$y = \text{arc tang}\left[\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\text{tang}\,x\right],$$

$$x-y = \text{arc tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right).$$

Comme

$$x-y = x - \text{arc tang}\left[\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\text{tang}\,x\right]$$

$$= \text{arc tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\{\log[1+m(\cos 2x+i\sin 2x)] - \log[1+m(\cos 2x - i\sin 2x)]\}$$

$$(i=\sqrt{-1})$$

et

$$D_m^n\,\text{arc tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2i}\,1.2.3\ldots(n-1)$$

$$\times\left\{\frac{(\cos 2x+i\sin 2x)^n}{[1+m(\cos 2x+i\sin 2x)]^n} - \frac{(\cos 2x-i\sin 2x)^n}{[1+m(\cos 2x-i\sin 2x)]^n}\right\}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+2m\cos 2x+m^2)^n}$$

$$\times\left[\sin 2nx + \frac{n}{1}m\sin 2(n-1)x\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}m^2\sin 2(n-2)x+\ldots+\frac{n}{1}m^{n-1}\sin 2x\right],$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 504, novembre 1887.

ou

$$\left[D_m^n \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right)\right]_{m=0} = (-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots(n-1)\sin 2nx,$$

$$\left(D_m^n = \frac{d^n}{dm^n}\right);$$

au moyen de la série de Maclaurin, prise avec le terme complémentaire (h_n) de Cauchy, on trouve

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y = x &- m\sin 2x \\ &+ m^2\frac{\sin 4x}{2} - m^3\frac{\sin 6x}{3} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} m^{n-1}\frac{\sin 2(n-1)x}{n-1} + R_n \end{aligned}\right.$$ (1),

où

$$R_n = \frac{(-1)^n m^n (1-\theta)^{n-1}}{(1+2\theta m\cos 2x + \theta^2 m^2)^n}$$
$$\times\left[\sin 2nx + n\theta m \sin 2(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1.2}(\theta m)^2\sin 2(n-2)x + \ldots + n(\theta m)^{n-1}\sin 2x\right].$$

---

(1) En posant $e^{ai} = p$ et $e^{-ai} = q$, on a généralement

$$\frac{1}{2}[f(pm)+f(qm)]$$
$$= \Phi(m) = f(0) + m\cos a f'(0) + \frac{m^2}{1.2}\cos 2a f''(0) + \ldots + \frac{m^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\cos(n-1)a f^{n-1}(0)$$
$$+ \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{2}\left[p^n D_y^n f(y)_{y=p\theta m} + q^n D_y^n f(y)_{y=q\theta m}\right],$$

$$\frac{1}{2i}[f(pm)-f(qm)]$$
$$= \Phi_1(m) = m\sin a f'(0) + \frac{m^2}{1.2}\sin 2a f''(0) + \ldots + \frac{m^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\sin(n-1)a f^{n-1}(0)$$
$$+ \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{2i}\left[p^n D_y^n f(y)_{y=p\theta m} - q^n D_y^n f(y)_{y=q\theta m}\right].$$

Cette série peut être obtenue aussi à l'aide des formules

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{F}\{\Phi[f_\nu(m)]\} \\ \quad = \mathrm{F}[\Phi(y)] \\ \quad = \mathrm{F}(x) \\ \quad = \mathrm{F}[\Phi(z)] \\ \quad + \left\{ \displaystyle\sum_{n=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2.3\ldots k} \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(k)} \mathrm{F}[\Phi(z)] \right\}_{z=r=f_\nu(0)} + h'_n; \end{cases}$$

où

$$x = \Phi(y), \qquad f(y) = m, \qquad f(r) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}'_n &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(n)} \mathrm{F}[\Phi(z)] \right\}_{\substack{z=r+\theta_2(y-z) \\ y=f_\nu(m)}} \\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)} [1-\theta_1]^{n-1} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(n)} \mathrm{F}[\Phi(z)] \right\}_{z=f_\nu\theta_1(m)} \\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)} \left\{ \left[1 - \frac{f(z)}{f(y)}\right]^{n-1} \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(n)} \mathrm{F}[\Phi(z)] \right\}_{z=r+\theta(y-z)}; \end{aligned}$$

et, pour $x = \Phi(y) = y$,

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{F}[f_\nu(m)] \\ \quad = \mathrm{F}(y) \\ \quad = \mathrm{F}(r) \\ \quad + \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2.3\ldots k} \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(k)} \mathrm{F}(z) \right\}_{z=r=f_\nu(0)} + \mathrm{R}_n \quad (^1), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(n)} \mathrm{F}(z) \right\}_{\substack{z=z+\theta_2(y-z) \\ y=f_\nu(m)}} \\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)} (1-\theta_1)^{n-1} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(n)} \mathrm{F}(z) \right\}_{z=f_\nu\theta_1(m)} \\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)} \left\{ \left[1 - \frac{f(z)}{f(y)}\right]^{n-1} \left[\frac{1}{f'(z)} \mathrm{D}_z\right]^{(n)} \mathrm{F}(z) \right\}_{z=r+\theta(x-z)}, \end{aligned}$$

$\{\theta_1(m) = \theta_1 f(y) = f[z + \theta(y - z)],\ 0 < \theta < 1,\ 0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1\}$,

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 362; août 1888.

En prenant

$$f(y)=\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=m, \qquad \mathrm{F}(y)=y,$$

on a

$$f(x)=0, \qquad r=f_v(0)=x,$$

$$f'(y)=-\frac{\sin 2x}{\sin^2(x+y)},$$

$$\frac{1}{f'(y)}=-\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2x},$$

$$\frac{1}{f'(y)}\,\mathrm{D}_y y=-\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2x},$$

$$\left[\frac{1}{f'(y)}\,\mathrm{D}_y\right]^{(2)} y=\left[\frac{1}{f'(y)}\,\mathrm{D}_y\right]\left[\frac{1}{f'(y)}\,\mathrm{D}_y\right] y$$

$$=\frac{\sin^2(x+y)\sin 2(x+y)}{\sin^2 2x},$$

. . . .

$$\left[\frac{1}{f'(y)}\,\mathrm{D}_y\right]^{(n)} y=(-1)^n.1.2.3\ldots(n-1)\,\frac{\sin^n(x+y)\sin n(x+y)}{\sin^n 2x},$$

$$\left\{\left[\frac{1}{f'(y)}\,\mathrm{D}_y\right]^{(n)} y\right\}_{y=r=x}=(-1)^n,1.2.3\ldots(n-1)\sin 2nx;$$

$$1-\frac{f[x+\theta(y-x)]}{f(y)}$$

$$=\frac{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)-\sin\theta(y-x)\sin[2x+(y-x)]}{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)}$$

$$=\frac{\sin 2x[\sin(y-x)\cos\theta(y-x)-\cos(y-x)\sin\theta(y-x)]}{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)}$$

$$=\frac{\sin 2x\sin[(1-\theta)(y-x)]}{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)}.$$

Par conséquent, d'après la formule (3),

$$y=x+\sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^k m^k\,\frac{\sin 2kx}{k}+h_n$$

$$=f_v(m)=\text{arc tang}\left[\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\text{tang}\,x\right],$$

où

$$h_n = (-1)^n m^n \frac{\sin^n[2x + \theta_2(y-x)] \sin n[2x + \theta_2(y-x)]}{n \sin^n 2x}$$

$$= (-1)^n m^n \frac{\sin^n[x + f_\nu(\theta_3 m)]}{n \sin^n 2x} \sin n[x + f_\nu(\theta_3 m)]$$

$$= (-1)^n m^n (1-\theta_1)^{n-1} \frac{\sin^n[x + f_\nu(\theta_1 m)] \sin n[x + f_\nu(\theta_1 m)]}{\sin^n 2x}$$

$$= (-1)^n m^n \left\{ \frac{\sin[2x + \theta(y-x)] \sin(y-x) - \sin\theta(y-x) \sin(y+x)}{\sin 2x \sin(y-x)} \right\}^{n-1}$$

$$\times \frac{\sin[2x + \theta(y-x)]}{\sin 2x} \sin n[2x + \theta(y-x)]$$

$$= (-1)^n m^n \left\{ \frac{\sin[(1-\theta)(y-x)]}{\sin(y-x)} \right\}^{n-1}$$

$$\times \frac{\sin[2x + \theta(y-x)]}{\sin 2x} \sin n[2x + \theta(y-x)].$$

Note de M. Rouché.

En même temps que M. Worontzof, MM. Darmanine et Audibert nous ont envoyé des solutions de la question 1570. La solution de M. Darmanine ne diffère pas au fond de celle de M. Worontzof, et celle de M. Audibert est une application du théorème de Maclaurin.

Quand nous avons proposé ce problème, nous avions en vue la solution suivante, qui est à la fois simple et directe :

La relation

$$\sin(x-y) = m \sin(x+y)$$

peut s'écrire

$$x - y = \operatorname{arc\,tang} \frac{m \sin 2x}{1 + m \cos 2x}.$$

Posons

$$\varphi(u) = \operatorname{arc\,tang} \frac{u \sin 2x}{1 + u \cos 2x};$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = \frac{\sin 2x}{1 + 2u \cos 2x + u^2}$$

ou, en effectuant la division,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi'(u) &= \sin 2x - u\sin 4x + u^2\sin 6x - \ldots\\ &\quad + (-1)^{n-2}u^{n-2}\sin 2(n-1)x\\ &\quad + (-1)^{n-1}u^{n-1}\frac{\sin 2nx + u\sin 2(n-1)x}{1+2u\cos 2x+u^2}.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par R le nombre défini par la relation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(m) &= \frac{m}{1}\sin 2x - \frac{m^2}{2}\sin 4x + \frac{m^3}{3}\sin 6x - \ldots\\ &\quad + (-1)^{n-1}\frac{m^{n-1}}{n-1}\sin 2(n-1)x + \mathrm{R}\frac{m^n}{n},\end{aligned}\right.$$

on voit que la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(u) &- \frac{u}{1}\sin 2x + \frac{u^2}{2}\sin 4x - \frac{u^3}{3}\sin 6x - \ldots\\ &- (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n-1}\sin 2(n-1)x - \mathrm{R}\frac{u^n}{n}\end{aligned}$$

s'annule pour $u = m$ aussi bien que pour $u = 0$. Sa dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &- \sin 2x + u\sin 4x - u^2\sin 6x - \ldots\\ &- (-1)^{n-1}u^{n-2}\sin 2(n-1)x - \mathrm{R}u^{n-1},\end{aligned}$$

qui, en vertu de (1), se réduit à

$$u^{n-1}\left[(-1)^{n-1}\frac{\sin 2nx + u\sin 2(n-1)x}{1+2u\cos 2x+u^2} - \mathrm{R}\right],$$

doit donc s'annuler pour une valeur de u comprise entre 0 et m, c'est-à-dire pour $u = \theta m$, θ étant un nombre convenablement choisi entre 0 et 1. On a donc

$$\mathrm{R} = (-1)^{n-1}\frac{\sin 2nx + \theta m\sin 2(n-1)x}{1+2\theta m\cos 2x+\theta^2 m^2}$$

et, par suite, en portant dans (2),

$$\begin{aligned}y = x &- \frac{m}{1}\sin 2x + \frac{m^2}{2}\sin 4x - \frac{m^3}{3}\sin 6x + \ldots\\ &- (-1)^{n-1}\frac{m^{n-1}}{n-1}\sin 2(n-1)x\\ &+ (-1)^n\frac{m^n}{n}\,\frac{\sin 2nx + \theta m\sin 2(n-1)x}{1+2\theta m\cos 2x+\theta^2 m^2}.\end{aligned}$$

SUR L'INVARIANT DIFFÉRENTIEL DES FIGURES CONGRUENTES;

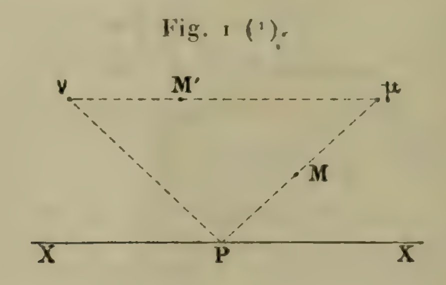
Par M. J. ANDRADE.

Cet invariant, dont M. Poincaré a fait un si magnifique usage dans sa création des fonctions fuchsiennes, a une origine géométrique des plus simples, sur laquelle je voudrais m'arrêter un instant.

Considérons la transformation plane qui remplace un point M par un point M' et qui résulte :

1° D'une inversion positive (M, μ) autour d'un pôle P situé sur une droite XX ;

Fig. 1 (1).



2° D'une réflexion (μ, ν) sur la même droite et en ce même pôle ;

3° D'une translation (ν, M') parallèle à la droite XX.

Une pareille transformation est représentée algébriquement par une substitution linéaire à coefficients réels, effectuée sur la variable imaginaire z représentée par le point M ; la droite XX étant prise comme axe réel.

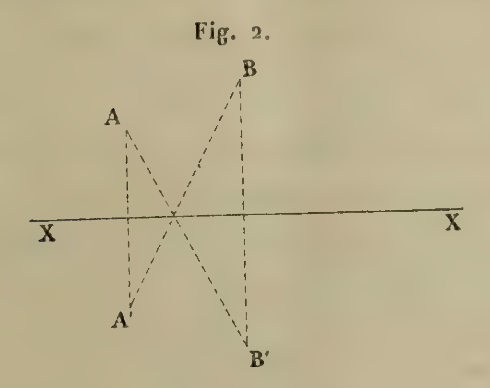
Considérons deux points A et B et leurs symétriques A' et B' par rapport à XX.

Ce groupement symétrique de quatre points sera

(1) Les trois points ν, M', μ ne sont pas en ligne droite.

évidemment conservé par la transformation qui nous occupe; or, si l'on désigne par a, b, a', b' les affixes de ces quatre points, la substitution homographique

Fig. 2.



représentée par cette transformation laissera inaltéré le rapport anharmonique

$$\frac{a-a'}{a-b'} \times \frac{b-b'}{b-a'}.$$

Ce rapport réel et positif se réduit à

$$\frac{AA' \times BB'}{\overline{AB'}^2}.$$

Cet invariant ne dépend que des points A et B. Nous le désignerons par $I_{A,B}$ ou indifféremment par $I_{a,b}$.

Considérons le cercle qui passe par les quatre points A, B, A', B', qui a son centre sur l'axe XX, et qui coupe cet axe aux points K et H.

Soient k et h les affixes de ces points, et envisageons le rapport anharmonique

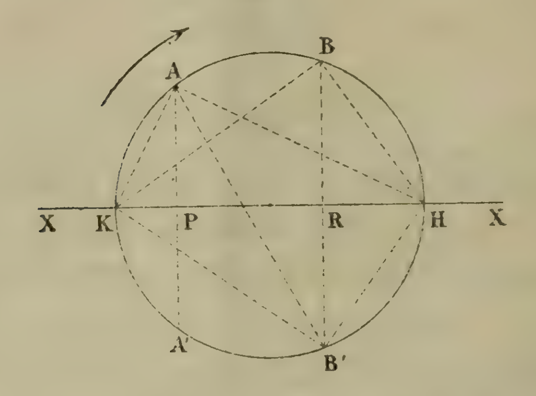
$$J_{A,B} = \frac{a-h}{a-k} \times \frac{b-k}{b-h}$$

réel, et même positif et > 1 quand A et B sont, comme nous le supposerons, d'un même côté de l'axe XX et que le sens du parcours du demi-cercle KABH est celui que nous considérons.

Nous aurons

$$J_{A,B} + 1 = \frac{AH.BK + AK.BH}{AK.BH} = \frac{AH.B'K + AK.B'H}{AK.BH},$$

Fig. 3.



c'est-à-dire, d'après le théorème de Ptolémée, sur le quadrilatère inscrit

$$J_{A,B} + 1 = \frac{KH.AB'}{AK.BH},$$

et comme

$$I_{A,B} = \frac{AA'.BB'}{\overline{AB'}^2},$$

on aura aussi

$$I_{A,B} \times (J_{A,B} + 1)^2 = \frac{\overline{KH}^2.AA'.BB'}{\overline{AK}^2.\overline{BH}^2} = \frac{4.\overline{KH}^2.AP.BQ}{AK.BH.AH.BK} J_{A,B},$$

ou, d'après une propriété classique du triangle rectangle,

$$I_{A,B} \times (J_{A,B} + 1)^2$$
$$= \frac{4.\overline{KH}^2.AP.BQ}{\sqrt{KP.KH}\sqrt{QH.HK}.\sqrt{PH.KH}.\sqrt{QK.KH}} J_{A,B} = 4J_{A,B};$$

donc enfin

$$I_{A,B} = \frac{4J_{A,B}}{[J_{A,B} + 1]^2}.$$

$J_{A,B}$ est donc aussi un invariant.

Concevons maintenant que le point B se rapproche indéfiniment de A, cet invariant devient

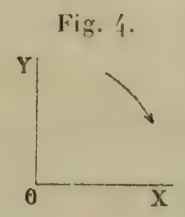
$$J_{a,a+da} = \frac{a-h}{a-k}\,\frac{a-k+da}{a-h+da},$$

c'est-à-dire, aux infiniment petits du second ordre près,

$$J_{a,a+da} = 1 + \frac{(h-k)}{(a-k)(h-a)}\,da;$$

la partie complémentaire à 1 est réelle et positive dans le cas où le point $a+da$ succède au point a en décrivant une circonférence (KH) dans le sens de la rota-

Fig. 4.



tion d'un angle droit qui amènerait l'axe imaginaire OY en coïncidence avec l'axe réel OX.

C'est ce que nous supposerons.

Nous avons donc pour la partie complémentaire cherchée l'expression réelle et positive

$$\frac{\mathrm{KH} \times \operatorname{mod} da}{\mathrm{AK}.\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{KH}.\operatorname{mod} da}{\sqrt{\mathrm{KP}.\mathrm{KH}}\sqrt{\mathrm{PH}.\mathrm{KH}}} = \frac{\operatorname{mod} da}{\mathrm{AP}},$$

et, si $a = x + iy$,

$$J_{a,a+da} = 1 + \frac{\operatorname{mod} da}{y};$$

on en conclut que l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} da}{y}$$

prise le long d'une ligne L ne change pas par la transformation de figure définie plus haut.

Cette intégrale joue le même rôle dans cette transformation que la longueur d'une ligne dans le déplacement d'une figure.

Nous allons voir maintenant ce que deviennent l'invariant différentiel $\frac{\operatorname{mod} da}{y}$ et l'intégrale correspondante dans la transformation par congruence. Rappelons d'abord la définition des figures congruentes.

Soit (M, M′) la transformation de figure définie plus haut.

Fig. 5.

P· ·P′

·M′

M

Soit (M, P) la transformation (T) la plus générale qui résulte de la combinaison de l'inversion, de la transformation par symétrie et du déplacement d'une figure plane.

Soit (M′, P′) la même transformation (T) effectuée sur le point M′.

Le point P′ est dit le transformé de P par congruence; ou encore la figure (P) est congruente à la figure (P′).

Analytiquement, si l'on désigne par R la substitution linéaire réelle que représente la transformation (M, M′) et par S la substitution linéaire *quelconque* que représente la transformation (M, P), la transformation par congruence sera la représentation de la substitution

$$S^{-1}.R.S.$$

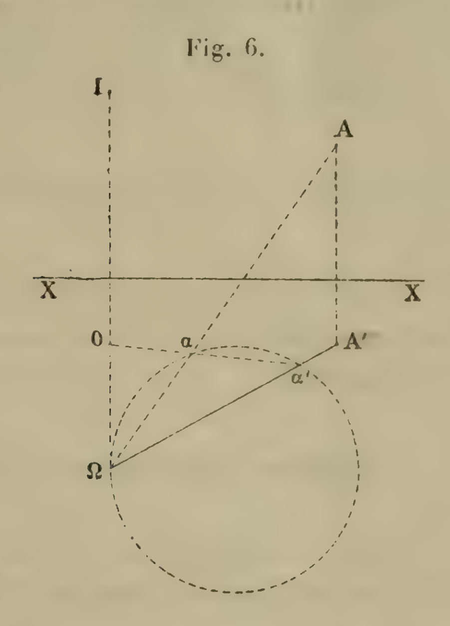
Il résulte immédiatement de la définition des figures congruentes que cette transformation de figures laisse inaltéré un certain cercle du plan, savoir le cercle qui est le transformé de l'axe XX, dans la transformation T, car cet axe XX restait lui-même inaltéré dans la

transformation que nous avons d'abord étudiée. Ce cercle se nomme le cercle *fondamental*.

On peut se demander ce que deviennent deux points A et A′ symétriques par rapport à XX lorsqu'on les soumet tous deux à la transformation T.

Supposons d'abord que la transformation T se réduise à une inversion autour du pôle Ω. Par cette inversion, l'axe XX se change, comme on sait, en un cercle

Fig. 6.



passant par Ω et dont le centre O se déduit par l'inversion considérée du point I symétrique du pôle Ω par rapport à XX.

D'ailleurs les trois points I, A et A′ sont évidemment sur une circonférence qui passe par Ω; leurs transformés O, α et α′ seront donc en ligne droite.

Mais les points α et α′ sont sur le cercle $\Omega\alpha\alpha'$, transformé de la droite AA′, et ce cercle doit couper orthogonalement le cercle transformé de XX; nous avons donc

$$\overline{O\Omega}^2 = O\alpha . O\alpha'.$$

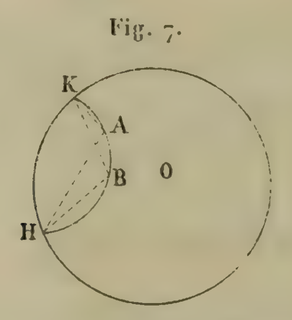
Ainsi deux points symétriques par rapport à XX se changent par la transformation T en deux points *situés l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du cercle fondamental, sur un même rayon de ce cercle, dont la longueur est moyenne proportionnelle entre les distances de ces deux points au centre.* Ce résultat n'est évidemment pas altéré, par les déplacements qui suivent l'inversion dans une transformation T.

Voyons maintenant la nouvelle forme de l'invariant $J_{a,a+da}$ dans la transformation par congruence.

L'invariant $J_{A,B}$ demeure inaltéré par la transformation T.

Considérons alors le cercle qui passe par A et B et

Fig. 7.



coupe le cercle fondamental O orthogonalement en H et K.

Nous avons encore

$$J_{A,B} = \frac{AH}{AK}\,\frac{BK}{BH}.$$

Si B devient infiniment voisin de A, et si nous désignons par φ et φ_1 les angles au centre du cercle O', mesurés par les arcs KA et AH, nous trouvons, par un calcul très simple,

$$J_{a,a+da} = 1 + d\varphi\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}\varphi\,\sin\frac{1}{2}\varphi_1}.$$

et, en désignant par l le rayon du cercle O′, nous pourrons écrire l'invariant différentiel :

$$\operatorname{mod} da \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)}{l \sin \frac{1}{2}\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi_1};$$

et, le facteur de mod da étant indépendant de la direction du déplacement da, nous choisirons ce déplacement de la façon la plus commode, c'est-à-dire normal à OA, comme la figure suivante le suppose.

Fig. 8.

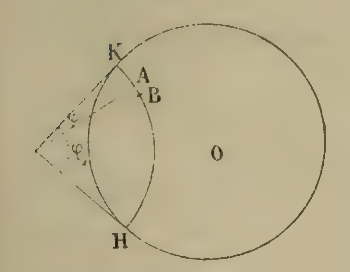
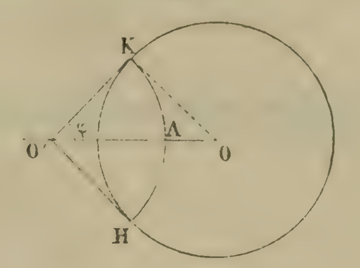


Fig. 9.



Le facteur de mod da est alors égal à

$$F = \frac{\sin\varphi}{l \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

Soit R le rayon OK du cercle fondamental, et ρ la distance AO.

Nous avons $l = R \cot\varphi$, d'où

$$F = \frac{\sin\varphi}{R \cot\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{R \cos\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{R \cos\varphi} = \frac{4}{\dfrac{R \cos\varphi}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}};$$

or, on a sur la figure

$$\frac{R}{\sin\varphi} - \frac{R \cos\varphi}{\sin\varphi} = \rho,$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \frac{\rho}{R},$$

d'où enfin

$$F = \frac{4}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)};$$

en faisant abstraction du facteur 4, nous avons donc pour remplacer l'invariant différentiel $\frac{\operatorname{mod} da}{y}$ cet autre

$$\frac{\operatorname{mod} da}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)},$$

et, par suite, aussi l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} da}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)}$$

prise le long d'une ligne quelconque.

PROBLÈME DONNÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1874;

Par M. L. LEFÈVRE.

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$ *satisfaisant aux relations*

(1) $$F(1 - x) = F(x),$$

(2) $$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m}$$

est

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x) = {} & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \\ & \times [A_0(x^2 - x + 1)^{3n} + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 \\ & \quad + A_2(x^2 - x + 1)^{3(n-2)}(x^2 - x)^4 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}], \end{aligned} \right.$$

p, q, n étant des nombres entiers, et $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des constantes quelconques.

1. Soit a une racine quelconque de l'équation

$$F(x) = 0;$$

la relation (2) montre que $\frac{1}{a}$ est également racine de cette équation. Posons

$$\frac{1}{a} = a';$$

la relation (1) montre alors que

$$1 - a' = 1 - \frac{1}{a}$$

sera une nouvelle racine ; puis

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a - 1},$$

en vertu de (2), et ainsi de suite. On est conduit de cette façon aux six expressions différentes

$$(4)\qquad a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{a}{a-1}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad 1 - a.$$

On reconnaît là les six valeurs du rapport anharmonique de quatre éléments, et l'on sait (ce qui peut se vérifier aisément) qu'en prenant l'inverse ou le complément à l'unité de l'une d'elles, on en retrouve une autre.

Les racines de l'équation $F(x)=0$ se partagent donc en groupes de 6 ; et son degré sera multiple de 6. Il n'y a d'exception possible que si deux des valeurs (4) déduites d'une racine a sont égales ; je supposerai d'abord que ceci n'ait pas lieu.

Alors $F(x)$ est de la forme

$$A_0\left[(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\cdots(x-1+a)\right]$$
$$\times\left[(x-b)\left(x-\frac{1}{b}\right)\cdots(x-1+b)\right]\cdots$$

Cela posé, je considère le polynôme du sixième degré

$$f(x)\equiv(x^2-x+1)^3-A(x^2-x)^2,$$

obtenu en faisant $p=0$, $q=0$, $n=1$ dans (3).

Il est facile de voir que

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^6}$$

et

$$f(1-x)=f(x),$$

ce qui prouve, comme pour $F(x)$, que les six racines de $f(x)=0$ sont de la forme (4), et par suite que

$$\begin{aligned}f(x)&\equiv(x^2-x+1)^3-A(x^2-x)^2\\&\equiv(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-1+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{a}{a-1}\right)\\&\qquad\times\left(x-\frac{1}{1-a}\right)(x-1+a).\end{aligned}$$

D'ailleurs, a étant connu, on calcule la valeur de A correspondante en donnant, dans cette identité, à x une valeur particulière.

Il en résulte enfin que $F(x)$ est de la forme

$$(5)\qquad\begin{cases}A_0[(x^2-x+1)^3-A(x^2-x)^2]\\\qquad\times[(x^2-x+1)^3-B(x^2-x)^2]\cdots\end{cases}$$

ou, en effectuant le produit,

$$(6) \begin{cases} A_0(x^2 - x + 1)^{3n} \\ \quad + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que deux des valeurs (4) relatives à une racine a de $F(x) = 0$ soient égales; les autres sont aussi égales deux à deux ou trois à trois, ou à l'un des trois groupes suivants de valeurs particulières des six expressions (4) ([1]) :

(I)	1	1	0	∞	∞	0	(deux des quatre éléments coïncident).
(II)	-1	-1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	(division harmonique).
(III)	$-\alpha$	$-\alpha^2$	$-\alpha$	$-\alpha^2$	$-\alpha$	$-\alpha^2$	(division équianharmonique).

α et α^2 désignent les racines cubiques imaginaires de l'unité.

Considérons alors les polynômes

$$\varphi(x) \equiv (x-1)x \equiv x^2 - x,$$
$$\psi(x) \equiv (x+1)(x-2)(2x-1) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2,$$
$$\chi(x) \equiv (x+\alpha)(x+\alpha^2) \equiv x^2 - x + 1,$$

qui ont pour racines les nombres (I), (II) ou (III); on a

$$(7) \begin{cases} \varphi(1-x) = \varphi(x), \\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\varphi(x)}{x^3}, \\ \psi(1-x) = -\psi(x), \\ \psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\psi(x)}{x^3}, \\ \chi(1-x) = \chi(x), \\ \chi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\chi(x)}{x^2}. \end{cases}$$

([1]) Voir Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. I, p. 49 et 90 de la traduction française.

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ admette comme racine l'une des quantités du groupe (II), par exemple; elle admet autant de fois les autres.

En effet, elle les admet au moins une fois; donc $F(x)$ est divisible par $\psi(x)$. Si alors le quotient

$$Q(x) = \frac{F(x)}{\psi(x)}$$

admet encore cette racine, les relations (1), (2) et (7) montrent qu'il admet encore les autres et qu'on peut, par conséquent, le diviser par $\psi(x)$, ...; on montre de même que $F(x)$ peut contenir en facteur une puissance de $\varphi(x)$ ou de $\chi(x)$. De plus, ces puissances sont paires pour $\varphi(x)$ et $\psi(x)$; car, si l'on change x en $\frac{1}{x}$, $\varphi(x)$ seul change de signe, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ ne changent pas. Si l'on change x en $1 - x$, $\psi(x)$ seul change de signe.

En résumé, le polynôme $F(x)$ le plus général est

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x) \equiv & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ & \times [A_0(x^2 - x + 1)^{3n} \\ & + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}]. \end{aligned} \right.$$

Cette forme me paraît préférable à la forme (3) de l'énoncé, car s'il est vrai que le facteur

$$(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r}$$

rentre dans le polynôme qui le suit, pour des valeurs particulières données aux constantes $A_0, A_1, \ldots$, le facteur $(x^2 - x)^{2p}$ y rentre aussi bien, si l'on fait

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{p-1} = 0.$$

Il n'est donc pas logique de mettre en évidence l'un de ces facteurs plutôt que l'autre.

Du reste, pour montrer que le facteur

$$(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r}$$

rentre dans le polynôme suivant, exprimons que $f(x)$ s'annule pour $x = -1$ (l'une des racines du groupe II), nous obtenons ainsi

$$A = \frac{27}{4}.$$

On vérifie d'ailleurs que

$$(9) \quad (x^2 - x + 1)^3 - \frac{27}{4}(x^2 - x)^2 = \frac{1}{4}(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2.$$

On voit qu'il suffirait, dans la forme (5), de prendre r quantités A, B, ... égales à $\frac{27}{4}$.

2. *Autres formes de* F(x). — Mais cette identité va nous fournir deux autres formes de F(x). Si l'on en tire soit $(x^2 - x)^2$, soit $(x^2 - x + 1)^3$ et qu'on porte dans (8), il vient

$$(10) \left\{ \begin{aligned} F(x) \equiv\ & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ & \times [B_0(x^2 - x + 1)^{3n} \\ & + B_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2 + \ldots] \end{aligned} \right.$$

ou

$$(11) \left\{ \begin{aligned} F(x) \equiv\ & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ & \times [C_0(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2n} \\ & + C_1(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2(n-1)}(x^2 - x)^2 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Cette dernière forme permet de résoudre algébriquement une équation F(x) = 0 satisfaisant aux conditions (1) et (2) lorsque, débarrassée des racines (I), (II), (III), si elle en a, son degré ne surpasse pas 24.

Posons dans le polynôme entre crochets

$$\frac{\psi^2(x)}{\varphi^2(x)} = y,$$

on a une équation en y du quatrième degré au plus, et qu'on sait par conséquent résoudre algébriquement. Soit $y = \lambda$ l'une de ses racines, il faut alors résoudre l'équation du sixième degré

$$\psi^2(x) - \lambda\varphi^2(x) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres

$$(12) \qquad \psi(x) - \sqrt{\lambda}\,\varphi(x) = 0,$$

$$(13) \qquad \psi(x) + \sqrt{\lambda}\,\varphi(x) = 0.$$

qui sont du troisième degré. x étant racine de l'une de ces équations, les relations (7) montrent que $\frac{1}{x}$ et $1 - x$ sont racines de l'autre.

L'équation (12) aura donc pour racines

$$a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}$$

par exemple, et alors (13) admettra

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{a}{a-1}, \quad 1 - a.$$

On sait d'une manière générale qu'il existe deux transformations homographiques qui permutent circulairement les racines d'une équation du troisième degré; ces deux transformations sont ici, pour (12) comme pour (13),

$$\theta x = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \theta^2 x = \frac{1}{1-x}.$$

SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES;

Par M. GUYOU,
Examinateur d'admission à l'École Navale.

I. — Classification des erreurs; objet et division du problème des approximations numériques; formule générale des erreurs.

L'introduction du problème des approximations numériques dans les programmes d'Arithmétique, très justifiée quand il s'agit d'élèves ne devant pas dépasser les notions les plus élémentaires, me paraît constituer une surcharge inutile pour ceux qui ont acquis les premières notions sur les dérivées; il y aurait, je crois, avantage, pour ces derniers, à restituer à la question sa véritable place, en Algèbre, où elle pourrait être traitée plus simplement et constituerait une sorte d'introduction à la théorie générale des erreurs.

L'ensemble du sujet pourrait être exposé ainsi qu'il suit; je considère le cas où les calculs doivent être effectués sans Tables.

Classification des erreurs du résultat d'une formule numérique. — Le plus généralement, les formules numériques contiennent des nombres obtenus par des mesures directes; ces nombres sont toujours affectés d'erreurs dues à l'imperfection des instruments et des procédés de mesure; de sorte que ces formules, au lieu de représenter la valeur exacte du nombre cherché, n'en représentent qu'une valeur affectée d'une certaine erreur que nous appellerons *erreur provenant des données*.

En outre, lorsque l'on effectuera les opérations indiquées dans la formule donnée, on commettra en général une seconde erreur, que nous appellerons *erreur de calcul.*

L'*erreur totale du résultat* sera égale à la somme algébrique de ces deux erreurs partielles ; si l'on désigne en effet par N la valeur exacte du nombre cherché, par N' la valeur exacte du nombre représenté par l'expression numérique dans laquelle on a introduit les nombres obtenus par des mesures directes, et enfin par N'' la valeur approchée de N' obtenue par le calcul, on a, en grandeur et en signe :

Erreur provenant des données.....	$N' - N$
Erreur de calcul..................	$N'' - N'$
Erreur totale.....................	$N'' - N$

et enfin

$$N'' - N = (N'' - N') + (N' - N).$$

Les erreurs commises sur les données sont toujours inconnues en grandeur et en sens, mais on peut toujours assigner à la valeur absolue de chacune d'elles une limite supérieure, et, de ces limites supérieures, on peut déduire une limite supérieure de l'erreur provenant des données ($N' - N$) ; c'est-à-dire une limite que $N' - N$ peut atteindre, mais qu'elle ne peut dépasser.

L'erreur de calcul $N'' - N'$, qui s'ajoute à celle-ci, peut être rendue aussi petite que l'on voudra ; mais, lors même qu'elle serait nulle, on ne pourra pas compter au résultat final sur une approximation plus grande que la limite supérieure de l'autre erreur.

Par conséquent, la limite supérieure de l'erreur provenant des données représente l'approximation la plus grande sur laquelle on puisse compter au résultat final.

Objet et division du problème des approximations numériques. — Désignons par $f(a, b, c, \ldots)$ une formule numérique dans laquelle a, b, c représentent les valeurs exactes de certains nombres que l'on obtient par des mesures directes, et soit N la valeur exacte de cette formule :

$$N = f(a, b, c, \ldots);$$

soient a', b', c', ... les valeurs approchées obtenues pour les nombres a, b, c, ...

Le problème des approximations numériques consiste à calculer la valeur de N à une approximation donnée, connaissant a', b', c', ... et les limites supérieures des erreurs commises sur ces nombres.

Il est clair que le problème ne sera possible que si l'erreur provenant des données ne peut pas atteindre l'approximation demandée : il conviendra donc tout d'abord de déterminer la limite supérieure de cette erreur. Il faudra ensuite calculer l'expression

$$N' = f(a', b', c', \ldots)$$

avec une approximation telle que la somme de l'erreur de calcul et de la limite supérieure précédemment obtenue soit au plus égale à l'approximation demandée.

On est ainsi conduit à diviser le problème en deux parties :

1° Déterminer une limite supérieure de l'erreur provenant des données ;

2° Calculer avec une approximation donnée une formule numérique donnée.

Il est clair que, lorsque les nombres contenus dans la formule seront tous connus exactement, ou, du moins, seront susceptibles d'être exprimés avec une approximation indéfinie, la deuxième partie du problème subsistera seule.

La solution de ces deux problèmes est fournie par l'application de la formule générale que nous allons établir.

Formule générale des erreurs. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes; désignons par δf l'accroissement que prend cette fonction lorsque, après avoir donné aux variables les valeurs a, b, c, on leur donne les valeurs $a + \delta a$, $b + \delta b$, $c + \delta c$; on aura

$$\delta f = f(a + \delta a,\ b + \delta b,\ c + \delta c) - f(a,\ b,\ c).$$

que l'on peut écrire identiquement

$$\begin{aligned}\delta f = f(a + \delta a,\ b + \delta b,\ c + \delta c) &- f(a,\ b + \delta b,\ c + \delta c)\\ + f(a,\ b + \delta b,\ c + \delta c) &- f(a,\ b,\ c + \delta c)\\ + f(a,\ b,\ c + \delta c) &- f(a,\ b,\ c).\end{aligned}$$

Appliquant à chacune de ces différences la formule des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned}\delta f = \delta a\, f'_a(a + \theta\, \delta a,\ b + \delta b,\ c + \delta c)\\ + \delta b\, f'_b(a,\ b + \theta'\, \delta b,\ c + \delta c)\\ + \delta c\, f'_c(a,\ b,\ c + \theta''\, \delta c).\end{aligned}$$

Désignons d'une manière générale par a', a'', a''', b', b'', b''', c', c'', c''' des nombres compris entre a et $a + \delta a$, b et $b + \delta b$, c et $c + \delta c$, ou égaux à ces limites elles-mêmes, on pourra écrire plus simplement

$$\delta f = \delta a\, f'_a(a', b', c') + \delta b\, f'_b(a'', b'', c'') + \delta c\, f'_c(a''', b''', c''').$$

Cette formule donne une expression de l'erreur que l'on commet lorsque, dans une formule numérique

$$f(a, b, c),$$

on remplace les nombres exacts a, b, c par les valeurs approchées $a + \delta a$, $b + \delta b$, $c + \delta c$; et il est clair qu'elle est applicable à un nombre quelconque de valeurs approchées a, b, c, ...

Les nombres a', b', c', a'', b'', ... qu'il faut introduire dans les dérivées partielles f'_a, f''_b, f'_c, ..., pour obtenir les facteurs des erreurs δa, δb, δc, sont inconnus, mais, en prenant pour ces nombres leurs valeurs maxima ou leurs valeurs minima, de manière à donner à ces facteurs les plus grandes valeurs qu'ils puissent prendre, on pourra déduire de cette formule une limite supérieure de l'erreur δf.

Remarque. — Il n'est pas inutile de faire remarquer ici que les erreurs δa, δb, δc, ... étant en général très petites, les valeurs des dérivées f'_a, f'_b, ... varient très peu lorsque l'on fait varier les nombres a', b', c', ... entre leurs limites extrêmes ; par conséquent, cette formule permet d'obtenir non seulement une limite supérieure de l'erreur δf, mais encore une limite très voisine de la valeur de l'erreur elle-même.

II. — Première partie du problème des approximations numériques.

Soit proposé de calculer l'erreur provenant des données a, b, c, ..., sur le résultat d'une formule numérique

$$f(a, b, c, \ldots)$$

dans laquelle les nombres a, b, c sont connus à $\pm\Delta a$, $\pm\Delta b$, $\pm\Delta c$ près.

On a, en désignant par δf, δa, δb, ... les valeurs exactes des erreurs en grandeur et en signe

$$\delta f = \delta a\, f'_a(a', b', c', \ldots) \\ + \delta b\, f'_b(a'', b'', c'', \ldots) + \delta c\, f'_c(a''', b''', c''', \ldots) + \ldots.$$

Désignons par a_1, b_1, c_1 les valeurs approchées connues de a, b, c.

Les sens et les grandeurs des erreurs δa, δb, δc, ... sont inconnus, mais leurs valeurs absolues sont plus petites que Δa, Δb, Δc, ...; les nombres a', b', c' compris entre a et a_1, b et b_1, c et c_1 sont *a fortiori* compris entre

$$a_1 + \Delta a \quad \text{et} \quad a_1 - \Delta a,$$
$$b_1 + \Delta b \quad \text{et} \quad b_1 - \Delta b,$$
$$c_1 + \Delta c \quad \text{et} \quad c_1 - \Delta c;$$

si, par conséquent, dans les dérivées partielles, on remplace le nombre a partout où il se trouve, soit par $a_1 + \Delta a$, soit par $a_1 - \Delta a$, de manière à forcer la valeur de cette dérivée, et que l'on agisse de même pour les nombres b, c, ..., on obtiendra des valeurs supérieures à celles que pourront prendre les facteurs des erreurs des données.

On obtiendra donc une limite supérieure de l'erreur δf en multipliant ces limites supérieures des dérivées partielles respectivement par Δa, Δb, Δc, ..., et en faisant la somme des valeurs absolues des produits.

Remarque. — Pour montrer par un exemple comment on peut obtenir des limites supérieures des valeurs des dérivées, supposons que l'on ait

$$f'_c = \frac{ac}{\sqrt{a-b}+b};$$

les valeurs approchées connues a_1, b_1, c_1 et les valeurs exactes a, b, c sont comprises entre

$$a_1 - \Delta a \quad \text{et} \quad a_1 + \Delta a,$$
$$b_1 - \Delta b \quad \text{et} \quad b_1 + \Delta b,$$
$$c_1 - \Delta c \quad \text{et} \quad c_1 + \Delta c.$$

Pour obtenir la valeur exacte du coefficient de δc, il faudrait remplacer a, b, c par des valeurs a', b', c' comprises entre a et a_1, b et b_1, c et c_1 ou égales à ces li-

mites; en remplaçant a au numérateur par $a_1 + \Delta a_1$ et au dénominateur par $a_1 - \Delta a_1$, nous augmenterons le numérateur et nous diminuerons le dénominateur; nous forcerons donc la valeur de l'expression. Nous obtiendrons le même résultat en remplaçant au numérateur c par $c_1 + \Delta c$, et enfin en remplaçant au dénominateur b par $b_1 + \Delta b$ sous le radical et par $b_1 - \Delta b$ en dehors; on aura ainsi évidemment

$$f'_c(a', b', c') < \frac{(a_1 + \Delta a)(c_1 + \Delta c)}{\sqrt{(a_1 - \Delta a) - (b_1 + \Delta b)} + (b_1 - \Delta b)}.$$

On peut donc formuler la règle suivante :

Pour obtenir une limite supérieure de l'erreur provenant de données incertaines, on remplacera dans la formule numérique ces données par des lettres a, b, c, ...; on prendra les dérivées partielles de l'expression ainsi obtenue par rapport à chacune d'elles; on remplacera dans ces dérivées les lettres a, b, c, ... par des valeurs limites par excès ou par défaut des nombres qu'elles représentent, de manière à forcer leurs valeurs; on multipliera les résultats obtenus respectivement par les limites des approximations Δa, Δb, Δc, ..., et l'on fera la somme des valeurs absolues des produits.

Exemple I. — Dans la formule numérique

$$N = \frac{(0,117\pi + 1,43)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5}},$$

les nombres 0,117 et 1,43, obtenus par mesures directes, sont connus à une unité près de l'ordre de leur dernier chiffre; on demande une limite supérieure de l'erreur qui peut affecter le résultat N.

En suivant textuellement la règle, nous avons

$$f(a, b) = \frac{(a\pi + b)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5}},$$

$$f'_a = \frac{2\pi(a\pi + b)}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5}}, \qquad f'_b = \frac{2(a\pi + b)}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5}}.$$

Remplaçons aux numérateurs a et b par des valeurs par excès 0,118 et 1,44, il vient

$$f'_a < \frac{2\pi(0,118\pi + 1,44)}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5}}, \qquad f'_b < \frac{2(0,118\pi + 1,44)}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5}}.$$

En multipliant ces nombres par 0,001 et par 0,01 et en faisant la somme, nous obtiendrons non seulement une limite supérieure de l'erreur, mais encore une limite très voisine de celle qui peut être atteinte, puisque Δa et Δb peuvent atteindre 0,001 et 0,01; mais dans l'application on n'a pas intérêt à connaître une valeur aussi précise, et l'on évalue en nombres ronds les valeurs des facteurs des erreurs, en ayant soin toutefois de toujours arrondir les nombres de manière à forcer les valeurs de ces facteurs; ainsi au numérateur nous remplacerons π par 4, au dénominateur $\sqrt{3}$ par 1 et $\sqrt{7}$ par 2; on aura ainsi

$$f'_a < \frac{8(0,472 + 1,44)}{2} < 8.$$

$$f'_b < \frac{2 \times 1,912}{2} < 2.$$

On a donc finalement

$$\delta N < 8 \times 0,001 + 2 \times 0,01 \qquad \text{ou} \qquad \delta N < 0,028.$$

Remarque. — Il ne faut pas perdre de vue que, lors même que les dérivées eussent été négatives, il aurait fallu faire la somme des produits.

Exemple II. — Dans un triangle ABC rectangle en A, on a obtenu par mesures directes

$$c = 12^{\text{m}},5 \text{ à } \pm 0,1 \text{ près},$$
$$C = 22^{\circ} \quad \text{ à } \pm 30' \text{ près}.$$

On demande une limite supérieure de l'erreur qui peut affecter le côté b calculé avec ces éléments.

On a

$$b = c \cot C = f(c, C),$$

$$f'_c = \cot C, \qquad f'_C = \frac{-c}{\sin^2 C}$$

et, par suite,

$$f'_c < \cot 21^{\circ}30', \qquad f'_C < \frac{12,6}{\sin^2 21^{\circ}30'}.$$

On trouve, à l'aide d'une Table des valeurs naturelles des lignes trigonométriques,

$$f'_c < 2,6, \qquad f'_C < 12,6 \times (2,7)^2 < 117;$$

il reste à multiplier par Δc et ΔC. On ne doit pas perdre de vue ici que les expressions usuelles des dérivées des lignes trigonométriques ont été obtenues en supposant l'accroissement de l'arc exprimé en fonction du rayon; on devra donc exprimer ΔC de cette manière : on aura ainsi

$$\Delta c = 0,1, \qquad \Delta C = \frac{\pi}{360};$$

il viendra donc enfin, en faisant les produits et ajoutant les valeurs absolues,

$$\delta b < 2,6 \times 0,1 + \frac{117\pi}{360},$$

$$\delta b < 0,26 + \frac{120}{360}\pi,$$

$$\delta b < 0,26 + \frac{\pi}{3} \qquad \text{ou} \qquad < 1^{\text{m}},31.$$

Remarque. — La formule que nous avons considérée ici ne peut pas être calculée arithmétiquement, mais, cette première partie du problème des approximations étant indépendante du procédé de calcul, la même méthode convient à tous les cas.

III. — Deuxième partie du problème des approximations.

Actuellement, sans nous préoccuper de l'origine ni de l'exactitude des nombres donnés, nous avons à calculer à une approximation donnée le résultat d'une formule numérique donnée.

Résultat complet d'une formule ou d'une opération arithmétique. — Nous appellerons résultat complet d'une formule numérique complexe ou d'une opération arithmétique simple la valeur exacte de cette formule ou du résultat de l'opération; ce résultat ne peut être exprimé le plus souvent qu'à l'aide d'un nombre indéfini de décimales ou du moins à l'aide d'un nombre de décimales supérieur à celui dont on a besoin.

Ordre du dernier chiffre à conserver dans le résultat approché d'une formule numérique. — Il ne suffit pas, pour résoudre le problème que nous avons en vue, de calculer un nombre différant du résultat complet de la formule d'une erreur moindre qu'une quantité donnée, il faut encore que ce résultat soit exprimé avec le plus petit nombre possible de chiffres; or, quel que soit le degré de précision avec lequel on effectuera les calculs, le résultat complet de la dernière opération différera toujours du résultat complet de la formule elle-même d'une petite quantité, et, si l'on supprime les chiffres à partir d'un certain ordre, même en forçant le dernier

chiffre conservé, on ajoutera à cette erreur une nouvelle erreur qui pourra atteindre 5 unités de l'ordre du premier chiffre supprimé; la nouvelle erreur pourra, il est vrai, être moindre, mais, comme le nombre cherché est inconnu, on ne peut pas affirmer *a priori* qu'elle sera moindre que 5 unités de l'ordre du premier chiffre supprimé.

Supposons que l'on demande le résultat à n unités de l'ordre α, n étant au moins égal à un; si n est plus grand que 5, soit 7 par exemple, on pourra exprimer le résultat en unités de l'ordre qui précède α : il suffira en effet de conduire les opérations de manière que le résultat complet de la dernière, celle qui donne le résultat final, soit erroné de moins de deux unités en plus ou en moins de l'ordre α, car, en supprimant les chiffres de l'ordre $\alpha + 1$ et en forçant au besoin le dernier chiffre conservé, on ajoutera à cette erreur une erreur moindre que 5 : le résultat conservé sera donc erroné de moins de 7 unités en plus ou en moins. Mais si n est plus petit que 5, on ne pourra pas faire cette suppression; pour n'avoir qu'une seule règle convenant à tous les cas, nous conviendrons que, lorsque l'on demandera le résultat d'une formule numérique à moins de n unités ($n > 1$) de l'ordre α, nous devrons exprimer ce résultat en unités de cet ordre.

Ainsi un résultat demandé à moins de $\pm$ 0,00352, c'est-à-dire de $\pm$ 3^{mm},52, devra être exprimé en millièmes; en d'autres termes, *l'ordre du dernier chiffre conservé devra être celui du premier chiffre significatif à droite du nombre qui exprime l'approximation.*

Des formules numériques simples. — Nous appellerons *formule numérique simple* une formule numérique dont le résultat peut s'obtenir par une seule opération

arithmétique; ainsi les formules

$$\sqrt{3,58932}, \quad \frac{42,85741}{27,412}, \quad 0,854 + 0,4305 + 7,325$$

sont des formules numériques simples.

Mais une formule telle que $(6,45)^3$ n'est pas une formule simple, car le résultat ne peut être obtenu que par deux multiplications.

Lorsque l'on aura à calculer la valeur d'une expression de ce genre à une approximation donnée, on sera en général conduit à remplacer les valeurs exactes des nombres qui entrent dans l'expression donnée par des valeurs approchées plus simples; si l'approximation du résultat complet de la nouvelle expression est de $\pm p$ unités de l'ordre α et que l'on supprime les chiffres de l'ordre $\alpha + 1$ en forçant au besoin le dernier chiffre conservé, on commettra une nouvelle erreur plus petite que ± 5 unités de l'ordre $\alpha + 1$, ou $\pm \frac{1}{2}$ unité de l'ordre α: le résultat conservé sera donc approché à moins de $\pm (p + \frac{1}{2})$ unités de l'ordre α. On est donc conduit à la règle suivante, applicable à tous les cas :

Si l'on veut obtenir le résultat d'une opération simple à moins de n unités de l'ordre α ($n > 1$), on pourra substituer aux nombres à opérer des nombres tels que la somme des influences des erreurs sur le résultat complet soit plus petite que $(n - \frac{1}{2})$ unités de l'ordre α; on effectuera ensuite l'opération sur ces nombres plus simples et l'on supprimera au résultat tous les chiffres qui suivent celui qui exprime des unités de l'ordre α, en forçant ce dernier d'une unité si le premier chiffre supprimé est plus grand que 5 ou égal à 5.

Remarque. — Lorsque les nombres à opérer sont

donnés directement, au lieu d'être les résultats d'opérations antérieures, on disposera du sens des erreurs qui seront commises sur ces nombres lorsqu'on les remplacera par des nombres plus simples : on pourra ainsi prendre ces erreurs dans un sens tel que l'erreur sur le résultat complet soit dans un sens connu; supposons que ce soit par excès : alors le résultat complet sera approché *par excès* à moins de n unités de l'ordre α; si l'on supprime à ce résultat tous les chiffres qui suivent celui d'ordre α, on commettra une erreur *par défaut* ε moindre qu'une unité de cet ordre; par conséquent, le résultat simplifié sera approché à moins de n unités de l'ordre α par excès, et à moins de ε par défaut; ε étant plus petit que 1 et par suite que n, le résultat sera encore approché à moins de n unités d'ordre α, mais on ne connaîtra plus le sens de l'approximation.

On pourrait donc, dans ce cas, se borner à prendre les nombres à opérer avec une approximation telle que l'erreur sur le résultat complet soit plus petite que n unités de l'ordre α au lieu de $n - \frac{1}{2}$, comme dans le cas précédent; mais l'avantage obtenu ainsi est si faible, lorsqu'il existe, qu'il est préférable de s'en tenir à la règle précédente, qui convient à tous les cas.

Calcul des formules numériques simples. — Une formule numérique simple peut contenir un nombre seulement, c'est le cas des carrés, des racines carrées et des racines cubiques, ou deux nombres, comme la multiplication, la division, la soustraction, ou enfin plusieurs nombres, comme l'addition.

Pour calculer à moins de n unités de l'ordre α, $(n > 1)$, la valeur d'une formule numérique simple, on commencera par remplacer par des lettres A, B, C, ... les nombres que l'on supposera susceptibles d'être sim-

plifiés, on appliquera ensuite, à l'expression obtenue, la formule générale des erreurs.

On obtiendra ainsi une expression de la forme

$$\partial f = \mathrm{M}\,\partial\mathrm{A} + \mathrm{N}\,\partial\mathrm{B} + \mathrm{P}\,\partial\mathrm{C} + \ldots.$$

On déterminera, comme on va le voir, les valeurs limites à donner à $\partial\mathrm{A}$, $\partial\mathrm{B}$, $\partial\mathrm{C}$, ... pour que ∂f soit plus petit que $n - \frac{1}{2}$ unités de l'ordre α; on prendra ensuite les nombres A_1, B_1, C_1, ... avec les approximations ainsi déterminées; on effectuera l'opération avec ces nombres, et l'on supprimera les chiffres qui suivent celui qui exprime des unités de l'ordre α, en forçant ce chiffre ou en le conservant, suivant la valeur du premier chiffre supprimé.

Dans le cas de l'addition et de la soustraction, la formule des erreurs est de la forme

$$\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}, \quad \ldots, \quad \partial\mathrm{S} = \partial\mathrm{A} + \partial\mathrm{B} + \partial\mathrm{C},$$
$$\mathrm{D} = \mathrm{A} - \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \partial\mathrm{D} = \partial\mathrm{A} - \partial\mathrm{B};$$

dans les autres cas, les facteurs M, N, P dépendent en général des nombres à opérer, et ces nombres doivent y être remplacés par des valeurs comprises entre les valeurs exactes et les valeurs approchées; ces dernières ne sont pas connues; il en est de même des premières lorsque les nombres doivent être déterminés par des opérations antérieures; mais, d'une manière générale, on peut toujours prendre deux valeurs assez écartées l'une de l'autre pour être certain *a priori* qu'elles comprennent la valeur exacte et la valeur approchée. On peut donc ainsi déterminer des limites M', N', P' supérieures des valeurs de ces facteurs.

On prendra alors pour $\partial\mathrm{A}$, $\partial\mathrm{B}$, $\partial\mathrm{C}$ des valeurs telles que la somme des valeurs absolues des produits $\mathrm{M}'\partial\mathrm{A}$,

$N'\,\delta B$, $P'\,\delta C$ soit plus petite que $n - \frac{1}{2}$ unités de l'ordre α; si l'on dispose du sens des erreurs δA, δB, δC, on pourra encore prendre ces erreurs de manière qu'une partie des produits ait le signe $+$ et l'autre partie le signe $-$, et l'on prendra ensuite les erreurs telles que chacune des sommes des produits de même signe soit plus petite que $n - \frac{1}{2}$ unités de l'ordre α, car la somme des erreurs sera plus petite que le plus grand des deux groupes.

Exemple. — Soit à calculer à $\pm$ 0,00475 la valeur de la formule simple

$$Q = \frac{3,5684}{3,1415}.$$

Nous poserons

$$Q = \frac{A}{\pi};$$

on en déduira

$$\delta Q = \frac{1}{\pi'}\,\delta A - \frac{A'}{\pi'^2}\,\delta\pi:$$

l'approximation demandée est 0,00475, soit $4^{\text{mm}},75 = n$; on devra prendre δA et $\delta\pi$ de manière que δQ soit plus petit que $(n - \frac{1}{2})$ millièmes ou $4^{\text{mm}},25$.

Si l'on prend δA et $\delta\pi$ par défaut l'un et l'autre, il suffira que chacun des deux termes soit plus petit que $(n - \frac{1}{2})$ millièmes; il faudra donc que

$$\frac{\delta A}{\pi'} < 4^{\text{mm}},25, \qquad \frac{A'\,\delta\pi}{\pi'^2} < 4^{\text{mm}},25.$$

Si l'on ne veut pas s'astreindre à fixer le sens des approximations δA et $\delta\pi$, on prendra chacun des termes plus petit que la moitié de $(n - \frac{1}{2})$ millièmes, savoir

$$\frac{\delta A}{\pi'} < 2^{\text{mm}},125, \qquad \frac{A\,\delta\pi}{\pi'^2} < 2^{\text{mm}},125.$$

Résolution des inégalités. — On sera donc ainsi

conduit en général à résoudre les inégalités de la forme

$$f(A', B')\,\delta A < m.$$

Ces inégalités se résolvent à vue en nombres ronds, mais il importe de ne pas oublier qu'en arrondissant les nombres il faudra toujours agir de manière à forcer les premiers membres et à réduire les seconds, afin que les inégalités que l'on a à résoudre soient vérifiées *a fortiori;* de plus, il ne faudra pas hésiter à prendre pour A′ et B′ des valeurs maxima et minima assez écartées l'une de l'autre pour être certain qu'elles comprendront entre elles la valeur exacte et la valeur approchée, car si l'on prenait des limites trop rapprochées, on pourrait constater, une fois le calcul terminé, qu'elles ne comprennent pas ces deux valeurs, et il faudrait recommencer.

Exemple. — Considérons l'exemple cité plus haut, et résolvons les deux inégalités

$$\frac{\delta A}{\pi'} < 2^{\text{mm}},125, \qquad \frac{A'\,\delta\pi}{\pi'^2} < 2^{\text{mm}},125.$$

Pour *forcer* les premiers membres, nous remplacerons π par la valeur par défaut 3, et A par la valeur par excès 4; on aura

$$\frac{\delta A}{3} < 2^{\text{mm}},125, \qquad \frac{4}{9}\,\delta\pi < 2^{\text{mm}},125;$$

chassant les dénominateurs et arrondissant les seconds membres en les *réduisant*, il vient

$$\delta A < 6^{\text{mm}}, \qquad 4\,\delta\pi < 18^{\text{mm}},$$
$$\delta\pi < 4^{\text{mm}};$$

on prendra donc

$$A = 3,57, \qquad \pi = 3,14;$$

on fera le quotient 3,57 par 3,14 jusqu'aux dix-mil-

lièmes ; on trouve

$$Q = 1,1369;$$

on supprime le chiffre 9 et l'on force le 6 d'une unité ; il vient donc enfin

$$Q = 1,137 \text{ à } \pm 4^{mm},75 \text{ près.}$$

Formules complexes. — Les formules numériques complexes sont celles dont la valeur ne peut être obtenue que par une série d'opérations simples successives, dont la dernière a pour résultat le nombre demandé.

Il est clair que, de l'approximation exigée pour le résultat final, on peut, en appliquant la règle qui précède, déduire l'approximation avec laquelle doivent être connus les éléments de la dernière opération ; de l'approximation de ces éléments, on pourra déduire celle qui est nécessaire pour les nombres à l'aide desquels on les obtient, et ainsi de suite ; on arrivera ainsi à connaître l'approximation des nombres de la première opération, on effectuera ensuite les opérations en s'arrêtant aux unités de l'ordre indiqué par l'approximation qu'on a reconnue être nécessaire pour les résultats, et en forçant au besoin le dernier chiffre.

Le calcul d'une formule complexe n'offre donc aucune difficulté nouvelle ; mais les calculs successifs doivent être faits avec beaucoup d'ordre, et nous engageons au moins les débutants à se conformer à la règle pratique énoncée ci-après.

Pour mieux faire saisir les différentes parties de cette règle, nous les appliquerons à l'exemple suivant, à mesure que nous les formulerons.

Exemple. — Calculer à $\pm 0,035$ la valeur de l'expression

$$X = \sqrt{\frac{45 \times 50,213642}{3,1415926}}.$$

Règle. — 1° *Remplacer par des lettres* A, B, C, . *dans l'expression donnée, le nombre ou les nomb auxquels on espère pouvoir substituer des nombres p simples.*

On écrira ainsi

$$N = \sqrt{\frac{45 \times A}{\pi}}.$$

2° *Préparer un Tableau en quatre colonnes aya respectivement pour titres :* (1) Opérations à effectu (2) Résultats approchés par excès et par défaut, (3) A proximations nécessaires, (4) Résultats définitifs.

(Les nombres inscrits dans les colonnes du Table ci-après seront obtenus comme on va l'indiquer.)

(1).	(2).		(3).	(4).
	Résultats approchés			
Opérations à effectuer.	par défaut.	par excès.	Approximations nécessaires.	Résulta définiti
A	50	51	0,01	50,21
$P = 45 \times A$	2200	2300	1	2259
π	3	4	0,001	3,14
$Q = \frac{P}{\pi}$	550	800	1,2	7,9
$N = \sqrt{Q}$	20	30	0,035	26,81

3° *Indiquer dans la colonne* (1) *les opérations effectuer successivement, en désignant par de nouvell lettres les résultats de ces opérations, et en ayant soi lorsque, dans une de ces opérations, on aura à utilis un des nombres qui ont été désignés au début pa des lettres, de placer la lettre qui désigne ce nomb avant l'opération elle-même.*

Ainsi, pour l'exemple considéré, la première opéra tion à effectuer est le produit $45 \times A$: on le désigne p

et on inscrit avant P la lettre A; on aura ensuite effectuer le coefficient $Q = \frac{P}{\pi}$; ayant à utiliser le nombre π dans cette opération, on inscrira cette lettre avant l'opération. On indiquera enfin la dernière opération à effectuer $N = \sqrt{Q}$; de cette manière, tous les nombres dont il y aura lieu de déterminer l'approximation sont inscrits dans la colonne (1) et dans l'ordre même dans lequel on aura à les employer.

4° *Dans la colonne* (2), *on inscrira des valeurs grossièrement approchées par défaut et par excès des nombres mentionnés dans la colonne* (1).

Il est possible que dans la suite quelques-uns de ces nombres restent inutiles, mais l'étude préliminaire qui serait nécessaire pour reconnaître *a priori* ceux dont on pourrait n'avoir pas besoin demanderait un travail au moins égal à celui qu'exige leur évaluation; il n'y a donc aucun avantage à faire cette étude.

5° *Inscrire sur la dernière ligne de la colonne* (3), *en regard de* N, *l'approximation demandée, déterminer ensuite l'approximation nécessaire aux éléments de la dernière opération, l'inscrire en regard de ces éléments, et continuer en remontant jusqu'à ce que la colonne soit remplie.*

On écrira ainsi, en regard de N, l'approximation demandée 0,035; on aura ensuite, conformément à la règle des opérations simples,

$$\delta N = \frac{1}{2N'}\,\delta Q < 0{,}035 - \tfrac{1}{2}\text{ cent.},\quad \frac{\delta Q}{40} < 0{,}03,\quad \delta Q < 1{,}2.$$

$$\delta Q = \frac{1}{\pi'}\,\delta P - \frac{P'}{\pi'^2}\,\delta\pi < 1{,}2 - \tfrac{1}{2}\text{ unité}\quad\text{ou}\quad 0{,}7,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\pi'}\,\delta P < \frac{0,7}{2}, \quad \frac{\delta P}{3} < \frac{0,7}{2}, \quad \delta P < 1,$$

$$\frac{P'}{\pi'^2}\,\delta\pi < \frac{0,7}{2}, \quad \frac{2300}{9}\,\delta\pi < 0,35, \quad 300\,\delta\pi < 0,35, \quad \delta\pi < 0,001,$$

et enfin

$$\delta P = 45\,\delta A < 1 - \tfrac{1}{2} \text{ ou } 0,5, \qquad \delta A < \frac{0,5}{50}, \qquad \delta A < 0,01.$$

Il ne faut pas perdre de vue qu'en arrondissant il faut forcer les premiers membres et réduire les seconds.

6° *On écrira immédiatement, dans la colonne* (4), *les valeurs des nombres qui ont été désignés au début par des lettres, avec l'approximation indiquée en regard, et l'on effectuera enfin les opérations indiquées dans la colonne* (1) *en poussant les calculs jusqu'aux unités de l'ordre du premier chiffre significatif à gauche de l'approximation inscrite dans la colonne* (3), *et en forçant ou en conservant le dernier chiffre, suivant que le premier chiffre supprimé est plus grand que* 5 *ou égal à* 5, *ou qu'il est plus petit que* 5.

Ainsi, dans l'exemple considéré, nous écrirons pour A et π les valeurs 50, 21 et 3,141 ; nous calculerons P en conservant au résultat le chiffre des unités qu'il n'y a pas lieu de forcer ; nous calculerons ensuite le quotient $\frac{P}{\pi}$ en dixièmes ; nous extrairons enfin la racine carrée en poussant jusqu'au chiffre des centièmes, l'aspect du reste montrant que le chiffre suivant est plus petit que 5 ; nous conserverons le résultat 26,81, qui est ainsi la valeur de N à 10,035 près.

Exercice.

Calculer $N = \dfrac{(0,11702\,\pi + 1,43115)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5,01264}}$ à $\pm$ 0,02 près,

$$N = \frac{(A\pi + B)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + C}}.$$

	Opérations à effectuer.	Résultats approchés par défaut.	Résultats approchés par excès.	Approximations nécessaires.	Résultats définitifs.
Numérateur.	A	0,1	0,12	0,00007	0,117
	π	3	4	0,002	3,14
	$P = A.\pi$	0,3	0,5	0,001	0,367
	B	1,4	1,5	0,001	1,431
	$S = P + B$	1,7	2	0,0025	1,798
	$K = S^2$	2	4	0,015	3,23
Dénominateur.	$R = \sqrt{3}$	1,7	2	0,0025	1,733
	$D = 2R$	3	4	0,01	3,47
	C	5	5,1	0,01	5,01
	$E = C + D$	8	9,1	0,026	8,48
	$F = \sqrt{E}$	2	3	0,007	2,912
	$N = \dfrac{K}{F}$	»	»	0,02	1,11

Détail du calcul des approximations.

$$N = \frac{K}{F}, \quad \delta N = \frac{1}{F'}\delta K - \frac{K'}{F'^2}\delta F < 0,02 - \tfrac{1}{2}\text{ cent. ou } < 0,015,$$

$$\frac{\delta K}{F'} < \frac{0,015}{2}, \quad \frac{\delta K}{2} < \frac{0,015}{2}, \quad \delta K < 0,015,$$

$$\frac{K'\,\delta F}{F'^2} < \frac{0,015}{2}, \quad \frac{4}{4}\delta F < \frac{0,015}{2}, \quad \delta F < 0,007.$$

Numérateur.

$$K = S^2, \qquad \partial K = 2S' \partial S < 0{,}015 - \tfrac{1}{2}\text{ cent.} < 0{,}01,$$

$$4\,\partial S < 0{,}01, \qquad \partial S < 0{,}0025,$$

$$S = P + B, \qquad \partial S = \partial P + \partial B < 0{,}0025 - \tfrac{1}{2}\text{ mill.},$$

$$\partial P + \partial B < 0{,}002,$$

$$\partial P < 0{,}001,$$

$$\partial B < 0{,}001,$$

$$P = A\pi, \qquad \partial P = A' \partial\pi + \pi' \partial A < 0{,}001 - \tfrac{1}{2}\text{ mill.},$$

$$A' \partial\pi + \pi' \partial A < 0{,}0005,$$

$$A' \partial\pi < \frac{0{,}0005}{2},$$

$$0{,}12\,\partial\pi < \frac{0{,}0005}{2},$$

$$\partial\pi < 0{,}002,$$

$$\pi' \partial A < \frac{0{,}0005}{2},$$

$$\partial A < 0{,}00007.$$

Dénominateur.

$$F = \sqrt{E}, \qquad \partial F = \frac{1}{2F'} \partial E < 0{,}007 - \tfrac{1}{2}\text{ mill.},$$

$$\frac{\partial E}{4} < 0{,}0065,$$

$$\partial E < 0{,}026,$$

$$E = C + D, \qquad \partial E = \partial C + \partial D < 0{,}026 - \tfrac{1}{2}\text{ cent.},$$

$$\partial C + \partial D < 0{,}020,$$

$$\partial C < 0{,}01,$$

$$\partial D < 0{,}01,$$

$$D = 2R, \qquad \partial D = 2\,\partial R < 0{,}01 - \tfrac{1}{2}\text{ cent.},$$

$$2\,\partial R < 0{,}005,$$

$$\partial R < 0{,}0025.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES QUESTIONS DONNÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882;

Par M. F. FARJON.

On donne deux cercles se coupant en A *et* B. *Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre en* C *et* D *l'hyperbole équilatère qui a pour sommets* A *et* B :

1° *Démontrer que la droite* CD *passe par un centre de similitude des deux cercles donnés;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par* A *et* B, *sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle;*

3° *Soit une conique satisfaisant à la question, démontrer que ses asymptotes passent par deux points fixes situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.*

I. Lemme. — *Si une hyperbole équilatère a pour sommets les extrémités d'une corde d'un cercle, elle coupe ce cercle en deux autres points qui sont en ligne droite avec son centre.*

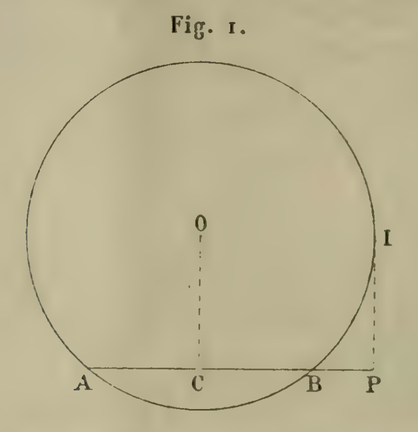
Soient la corde AB du cercle O (*fig.* 1), C son milieu, I l'une des intersections du cercle et de l'hyperbole équilatère qui a AB pour axe transverse; menons la perpendiculaire IP sur AB, on a

$$\overline{IP}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CB}^2 = (PC + CB)(PC - CB) = PA \times PB;$$

donc PI est tangente à la circonférence et I sur le diamètre parallèle à AB.

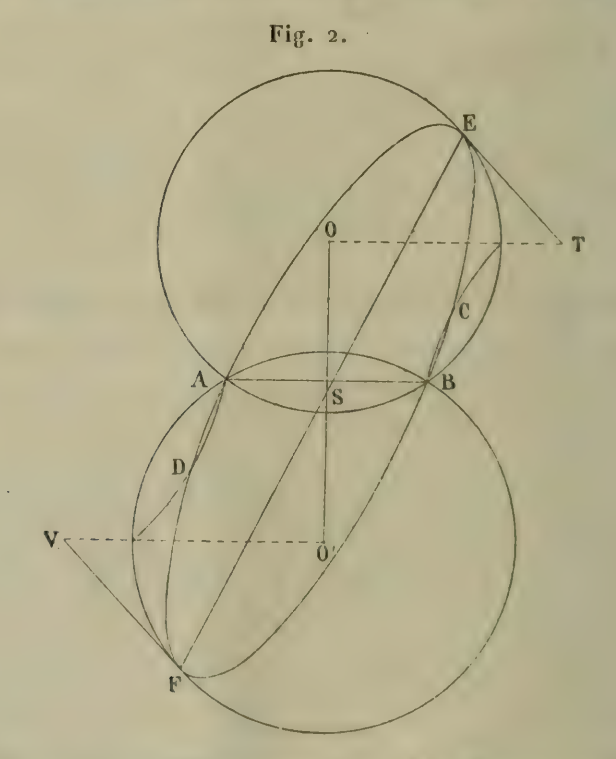
Cela posé, considérons (*fig.* 2) deux cercles O et O′ ayant AB pour corde commune, et traçons une conique

Fig. 1.



qui passe par AB et soit tangente aux deux cercles en E et F. Je remarque d'abord que les deux tangentes en

Fig. 2.



E et F sont parallèles : en effet, les deux cercles et la conique ayant une corde commune AB, les trois autres

cordes d'intersection qui sont la droite à l'infini et les deux tangentes en E et en F doivent concourir en un même point : donc ces deux dernières sont parallèles. — Autrement, on sait que les bissectrices des angles que fait la corde AB, soit avec la tangente en E, soit avec la tangente en F, sont parallèles aux axes de la conique ; il s'ensuit que ces deux tangentes sont parallèles entre elles.

Il en résulte que la droite EF passe par l'un des centres de similitude des cercles O et O'.

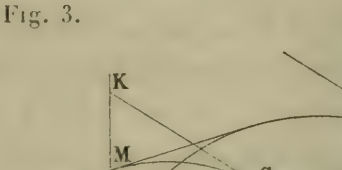
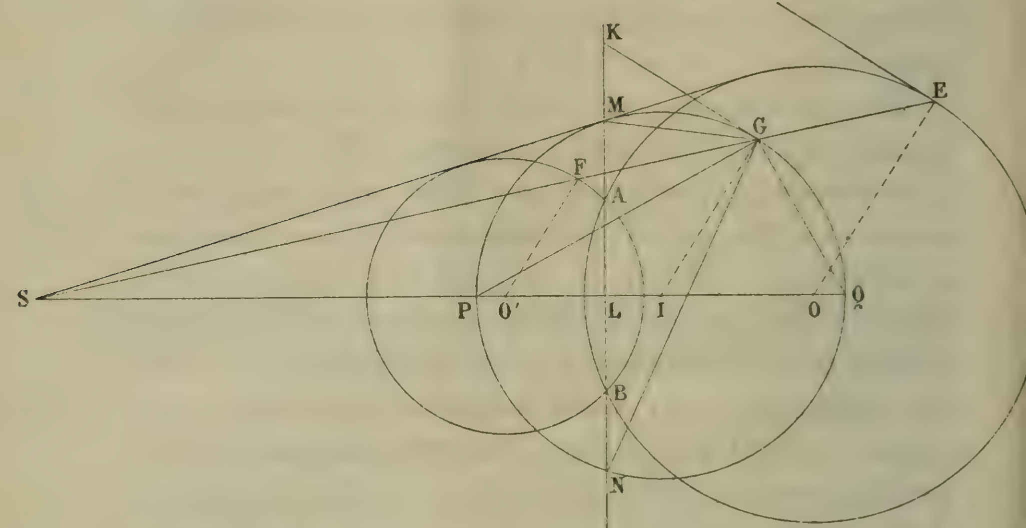
Si l'on considère le système formé par la conique, le cercle O et l'hyperbole équilatère AB, leurs trois cordes d'intersection concourent au point T, intersection de la tangente en E et du diamètre de O parallèle à AB. De même, pour le système de la conique, du cercle O' et de l'hyperbole, les trois cordes d'intersection concourent au point V, intersection de la tangente en F et du diamètre de O' parallèle à AB. La corde d'intersection de la conique et de l'hyperbole est, par conséquent, la droite TV. Mais T et V, intersections de droites homologues deux à deux, sont eux-mêmes homologues : donc TV passe par le même centre de similitude que EF.

C. Q. F. D.

II. La droite EF est un diamètre de la conique, le centre de celle-ci est au milieu G de EF (*fig.* 3) ; OE et O'F sont parallèles, la droite GI menée parallèlement à ces dernières passe par le milieu I de OO' et est égale à $\frac{1}{2}(R+R')$ si le point S est le centre de similitude directe, et à $\frac{1}{2}(R-R')$ si S est le centre de similitude inverse. Le lieu du centre G se compose donc de deux cercles concentriques, ayant pour centre le milieu de la distance des centres et respectivement pour rayons la demi-somme et la demi-différence des rayons des deux

cercles donnés. Le premier, homothétique aux deux cercles donnés par rapport au centre de similitude directe, est tangent aux tangentes communes extérieures aux points M et N où celles-ci rencontrent l'axe radical

Fig. 3.

AB. Le second est homothétique aux deux cercles donnés par rapport au centre de similitude inverse; la distance du point I à l'axe radical étant égale à $\frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$, on voit d'ailleurs que ce second cercle ne peut rencontrer l'axe radical, tandis que le premier le coupe nécessairement.

III. Soit K le point où la tangente en G au cercle I rencontre la droite AB; les axes de la conique sont parallèles aux bissectrices de l'angle GKA ou de l'angle GIO dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du précédent. Si donc P et Q sont les points où le cercle I coupe la ligne des centres OO', les axes de la conique sont GP et GQ. Ainsi les axes de toutes les coniques qui ont leur centre sur une même circonférence I passent par

deux points fixes qui sont les intersections de cette circonférence avec la ligne des centres.

Les axes GP et GQ sont les bissectrices de l'angle formé par les asymptotes; de plus, le milieu du segment intercepté par celles-ci sur l'axe radical coïncide avec le milieu L de AB. Nous avons donc, pour construire le triangle formé par les asymptotes et la corde AB, le sommet G du triangle, la bissectrice de l'angle en G et le milieu L du côté opposé : la perpendiculaire élevée sur AB en L coupe les bissectrices de l'angle G aux points où celles-ci rencontrent la circonférence circonscrite au triangle. Cette circonférence n'est donc autre, dans le cas présent, que celle du cercle I, et les deux asymptotes sont les droites GM et GN, qui joignent le centre G aux points d'intersection du cercle I et de l'axe radical AB. Les asymptotes de toutes les coniques qui ont leur centre sur le cercle I passent, par conséquent, par les deux points fixes M et N. C. Q. F. D.

On voit par là que toutes les coniques qui ont leur centre sur le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$, correspondant au centre de similitude directe, sont des hyperboles. La courbe se réduit à deux droites, qui sont l'axe radical et la tangente commune aux deux cercles, lorsque le centre est en M ou en N. On remarquera qu'une transversale, issue du centre de similitude S, détermine deux hyperboles dont l'une est semblable à la conjuguée de l'autre.

Toutes les coniques qui ont leur centre sur le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ sont au contraire des ellipses, puisque, ce cercle ne rencontrant pas l'axe radical, elles ont leurs asymptotes imaginaires.

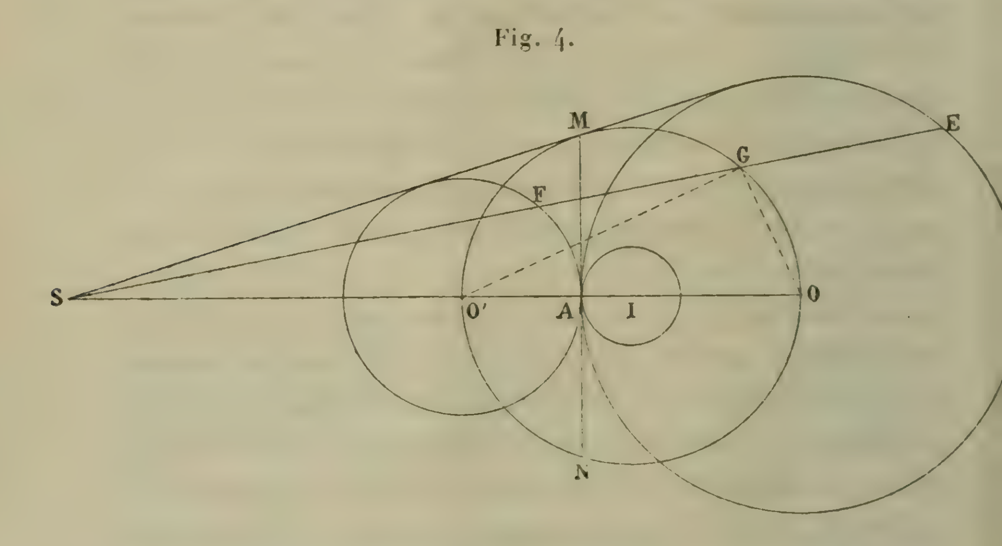
Scolie. — Il existe deux coniques, satisfaisant à la double condition de passer par A et B et d'être tangentes à O et à O', qui ne rentrent pas dans les groupes précédents. Menons par A une tangente à O et par B

une tangente à O′; l'ensemble de ces deux droites constitue une conique satisfaisant aux conditions, mais dont le centre n'est pas sur le cercle I et dont les asymptotes ne passent ni par M, ni par N. De même pour la tangente à O′ en A et la tangente à O en B. Ce sont deux solutions singulières.

IV. Examinons le cas particulier où les deux cercles O et O′ sont tangents extérieurement.

L'hyperbole équilatère se réduit alors à deux droites rectangulaires menées par le point de contact A (*fig.* 4)

Fig. 4.



et toutes les coniques correspondant au centre de similitude inverse sont les doubles cordes passant par le point A; ce sont des ellipses indéfiniment aplaties dont les centres sont sur le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$. Quant au cercle $\frac{1}{2}(R + R')$, il passe par les centres O et O′ : chacune des hyperboles répondant à la question a un double contact avec chacun des cercles O et O′, et l'on voit, en effet, que les axes de ces hyperboles passent par les deux centres.

Si les deux cercles O et O′ sont égaux, qu'ils soient

sécants ou tangents, le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ se réduit à un point, et le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$ a son centre sur l'axe radical; d'où il suit que toutes les ellipses de la figure sont concentriques, et que toutes les hyperboles sont équilatères, puisque leurs asymptotes sont rectangulaires.

On a supposé jusqu'ici dans les figures que les deux centres O et O′ étaient situés de part et d'autre de l'axe radical. S'il en était autrement, les démonstrations et les conclusions qui précèdent resteraient les mêmes. Mais si les deux cercles sont tangents intérieurement, ce sont les hyperboles, correspondant au centre de similitude directe, qui se réduisent à des droites rayonnant autour du point de contact, et dont les centres sont situés sur le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$ tangent aux deux cercles donnés. Quant aux ellipses correspondant au centre de similitude inverse, elles ont un double contact avec chacun des cercles O et O′, et comme le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ est alors décrit sur la ligne des centres comme diamètre, on voit en effet que les axes de ces ellipses passent respectivement par les centres des deux cercles donnés.

Si les deux cercles deviennent égaux, ils se confondent : le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$ est le cercle O lui-même, et le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ est le centre, qui est en même temps celui de toutes les ellipses qui ont un double contact avec O′, dans les conditions de la figure.

V. A quoi correspondent les propositions qui précèdent, lorsque les deux cercles O et O′ ne se coupent plus réellement? La corde commune AB est imaginaire, mais certains éléments, tels que les cercles $\frac{1}{2}(R + R')$ et $\frac{1}{2}(R - R')$, restent réels. L'interprétation est des plus simples.

Reprenons le lemme du § I. La longueur de la demi-

corde AC est déterminée par la relation

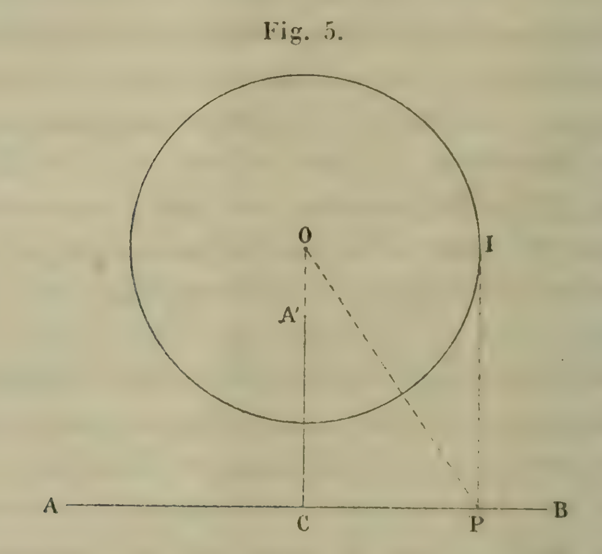
$$\overline{AC}^2 = R^2 - \overline{OC}^2.$$

Si AB est extérieure au cercle, AC est imaginaire et l'on a (*fig.* 5)

$$-\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 - R^2.$$

AB, au lieu d'être l'axe transverse de l'hyperbole équilatère, en devient l'axe imaginaire, et pour avoir un

Fig. 5.



sommet de la courbe, il faut prendre sur CO, à partir de C, une longueur $CA' = \sqrt{\overline{OC}^2 - R^2}$.

Cela posé, soit I le point d'intersection de l'hyperbole ainsi déterminée et du cercle; menons la perpendiculaire IP sur AB, on aura

$$\overline{IP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CA'}^2 = \overline{PO}^2 - R^2 :$$

donc IP est tangent au cercle, et le point I est sur le diamètre parallèle à AB.

Considérons actuellement les deux cercles O et O'. Si

la corde commune AB est imaginaire, il est évident que les ellipses passant par A et B sont imaginaires; leurs points de contact avec les cercles O et O′ le sont aussi, mais la droite qui les joint est réelle et passe par le centre de similitude inverse. Il en est de même de la droite réelle qui joint les deux points d'intersection imaginaires de la courbe avec l'hyperbole équilatère définie ci-dessus. Les centres des ellipses sont réels et leur lieu est le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$; les axes sont connus, puisqu'ils passent par les points où le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ coupe la ligne des centres. Enfin ces ellipses ont des asymptotes réelles, puisque le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ coupe ici l'axe radical et que tous les couples d'asymptotes passent par ces points d'intersection.

Quant aux hyperboles passant par les points imaginaires A et B, elles ne cessent point d'être réelles, seulement elles ne coupent plus l'axe radical.

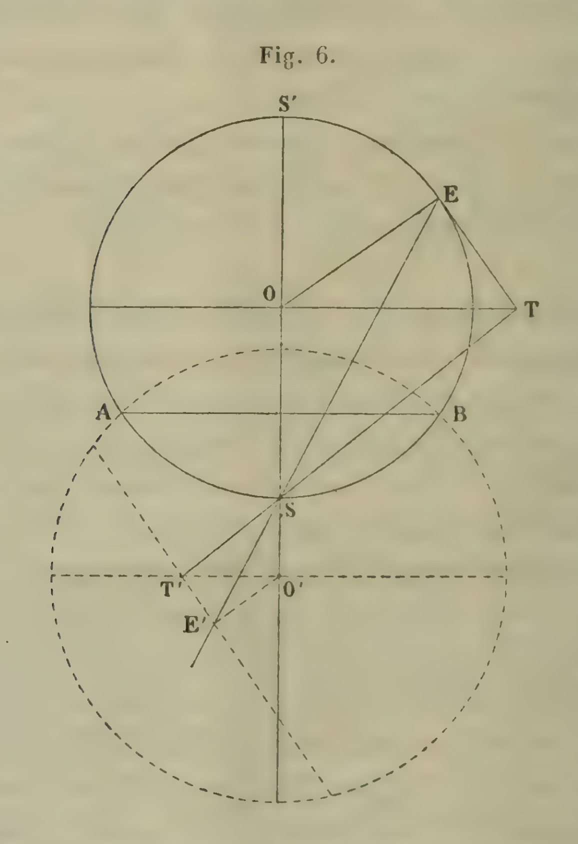
VI. Supposons que le rayon R′ croisse indéfiniment : des deux ellipses que détermine une sécante EF menée par le centre de similitude inverse, l'une, celle qui est tangente aux deux portions de circonférence extérieures l'une à l'autre, tendra vers une parabole; l'autre, celle qui est tangente aux deux portions de circonférence qui se pénètrent, tendra à se confondre avec le segment AB. De même, des deux hyperboles déterminées par une sécante EF menée par le centre de similitude directe, l'une, celle dont la branche passant par A et B est tangente au cercle O, tendra vers une parabole embrassant extérieurement ce cercle (tandis que la précédente lui était tangente intérieurement), et l'autre, celle dont la branche passant par A et B est tangente au cercle O′, tendra à se confondre avec les deux parties de AB extérieures au segment AB.

A la limite, le cercle O′ se confond avec AB; on a ainsi ce théorème :

Si l'on trace une hyperbole équilatère ayant pour sommets deux points A *et* B *pris sur une circonférence, et une parabole passant par* A *et* B *et tangente, intérieurement ou extérieurement, à la circonférence, la corde commune de cette parabole et de cette hyperbole passe par l'une des extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à* AB.

Il est aisé de le vérifier directement. Soient (*fig.* 6) E

Fig. 6.



le point de contact, ET la tangente rencontrant en T le diamètre parallèle à AB, SS′ le diamètre perpendiculaire à AB. Le diamètre de la parabole au point E,

parallèle à l'axe, est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle ETO, ou parallèle à la bissectrice de l'angle S'OE : c'est donc la droite ES. Décrivons un cercle de rayon quelconque passant par A et B. Soit O' son centre. Si l'on considère le système des deux cercles et de la parabole, on voit que la corde d'intersection de cette courbe et du cercle O' sera parallèle à ET, d'où il suit que le milieu E' de cette corde se trouvera au point de rencontre de son diamètre conjugué ES et de la parallèle O'E' à OE ; la parallèle à AB menée par le centre O' étant d'ailleurs la corde d'intersection du cercle O' et de l'hyperbole, le point T' où cette parallèle rencontre la corde commune à O' et à la parabole appartiendra, comme T, à la corde commune de la parabole et de l'hyperbole. Mais les triangles OET et O'E'T', SOE et SO'E' sont semblables deux à deux ; on a donc

$$\frac{T'E'}{TE} = \frac{E'O'}{EO} = \frac{SE'}{SE};$$

les trois points T', S, T sont donc en ligne droite.

C. Q. F. D.

SUR LES CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES ;

Par M. Cl. SERVAIS,
Répétiteur à l'Université de Gand.

I.

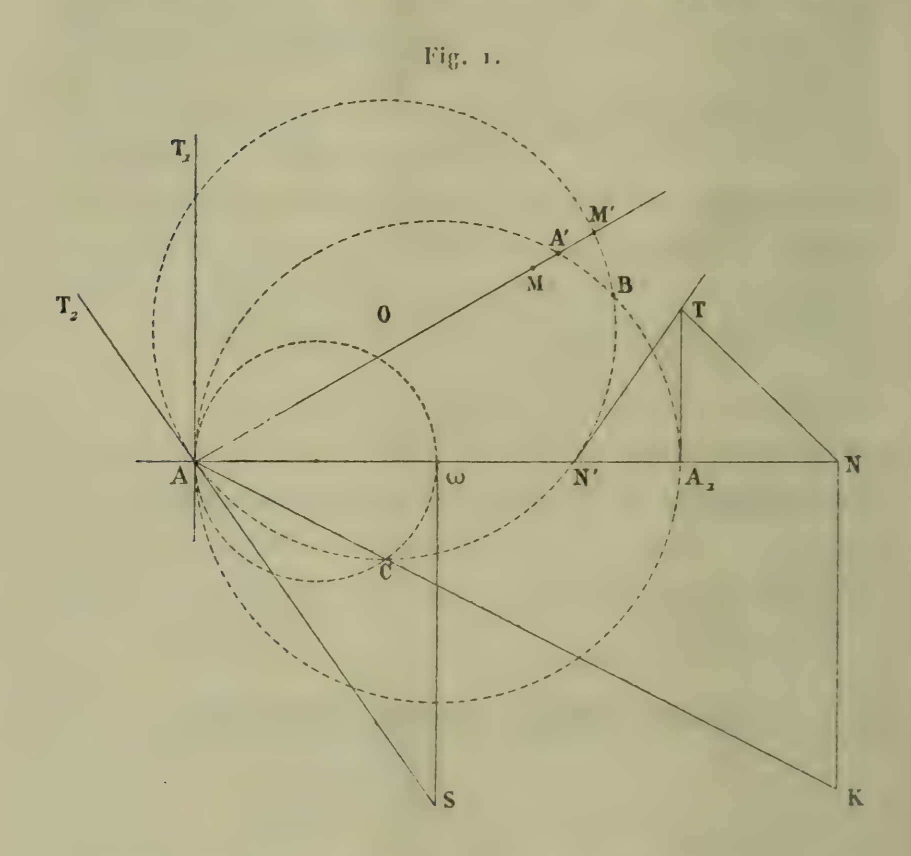
1. Considérons deux cercles ω et O se coupant aux points A et B; par le point A menons une sécante rencontrant les deux cercles respectivement aux points A'

et M′; le lieu du point M tel que

$$(AA'MM') = -1$$

est une cubique circulaire ayant le point A pour point double. En effet, elle est tangente aux deux cercles au point A, et elle passe par leurs points communs; B est donc un point de la courbe. Nous appellerons AT_1, AT_2

Fig. 1.



les tangentes aux cercles. Le cercle osculateur au point A de la cubique, correspondant à la tangente AT_1, est le cercle ($A\omega$) décrit sur $A\omega$ comme diamètre; car ce cercle correspond dans la transformation à la droite de l'infini qui ne rencontre le cercle O qu'aux points cycliques. Si C est le point de rencontre des cercles O et

$(A\omega)$, AC est parallèle à l'asymptote. On peut donc énoncer la propriété suivante :

Au point double A *d'une cubique circulaire, on décrit un cercle tangent à chacune des branches de la courbe; l'un* ω *a pour rayon le diamètre* $A\omega$ *du cercle osculateur et rencontre la cubique au point* B; *l'autre* O *passant par* B *rencontre le cercle osculateur* $(A\omega)$ *en un point* C *tel que* AC *est parallèle à l'asymptote. Une sécante issue du point double rencontre les cercles* ω *et* O *et la cubique, respectivement en des points* A', M', M *tels que* $(AA'MM') = -1$.

2. Soient A_1, N', N les points d'intersection de la droite $A\omega$ avec les deux cercles et la cubique. On a

$$(a)\qquad \frac{2}{A_1A} = \frac{1}{A_1N'} + \frac{1}{A_1N}.$$

Si les tangentes aux points A_1 et N' aux cercles ω et O se coupent au point T, TN est la tangente à la cubique au point N. Appelons ψ l'angle TNA, φ le complément de l'angle T_1AT_2, 2ρ le diamètre $A\omega$, N la corde normale AN; on aura

$$A_1N' = -A_1T\cot\varphi = -A_1N\frac{\tang\psi}{\tang\varphi};$$

par conséquent, l'égalité (a) devient

$$-\frac{2}{4\rho} = -\frac{1}{N-4\rho}\left(\frac{\tang\varphi}{\tang\psi} - 1\right).$$

On déduit de là

$$(1)\qquad \frac{2\rho}{N} = \frac{\tang\psi}{\tang\varphi + \tang\psi}.$$

3. La conique transformée de la droite $N'T$ est tangente à la cubique aux points A et N; elle a pour cercle

osculateur le cercle $(A\omega)$ et sa corde de courbure est parallèle à N'T. Or les deux droites AT_2 et N'T sont également inclinées sur AN; donc :

La conique tangente à une cubique circulaire aux extrémités de la corde normale AN *au point double* A, *et qui a au point* A *même cercle osculateur que la cubique, a pour corde de courbure au point* A *la droite symétrique de la seconde tangente au point double par rapport à la première.*

Ceci nous montre que la formule (1) est applicable aux coniques, si φ représente l'angle de la normale et de la corde de courbure.

4. On a

$$\frac{2}{AA'} = \frac{1}{AM'} + \frac{1}{AM},$$

$$\frac{AN'}{AM'} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \chi)},$$

si χ représente l'angle MAN; donc

$$\frac{1}{2\rho\cos\chi} = \frac{1}{AN'}\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\chi)} + \frac{1}{AM};$$

mais

$$\frac{2}{4\rho} = \frac{1}{AN'} + \frac{1}{N},$$

par conséquent

$$(2) \qquad \frac{1}{AM}\frac{\sin(\varphi+\chi)}{\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tang}\chi}{2\rho} + \frac{\operatorname{tang}\varphi}{N}.$$

Conséquences. — En prenant pour sécante la droite AC, on obtient

$$\frac{2\rho}{N} = \frac{\operatorname{tang}\chi_1}{\operatorname{tang}\varphi},$$

χ_1 étant l'angle de l'asymptote et de la normale AN. On peut interpréter géométriquement cette formule et arriver à la construction du cercle de courbure au point A de la cubique. Élevons aux points ω et N des perpendiculaires à la droite AN rencontrant respectivement AT_2 et AC aux points S et K; on aura

$$\omega S = A\omega \tang \varphi = N \tang \chi_1 = NK;$$

donc :

Les parallèles menées par les extrémités ω et N du diamètre du cercle osculateur et de la corde normale au point double A à la tangente AT_1 et limitées respectivement à la tangente AT_2 et à la parallèle AC à l'asymptote, sont égales.

Les sécantes AB et AO donnent les formules

$$\frac{\sin\varphi\cos\chi_2}{N} = \frac{\sin(\varphi - \chi_2)}{4\rho}$$

et

$$\frac{\cos^2\varphi}{2\rho} + \frac{\sin^2\varphi}{N} = \frac{\sin\varphi}{N_1},$$

si l'on représente l'angle BAN par χ_2 et la seconde corde normale AN_1 par N_1. Il suffit de remarquer que

$$AB = 4\rho\cos\chi_2$$

et que, pour la sécante AN_1,

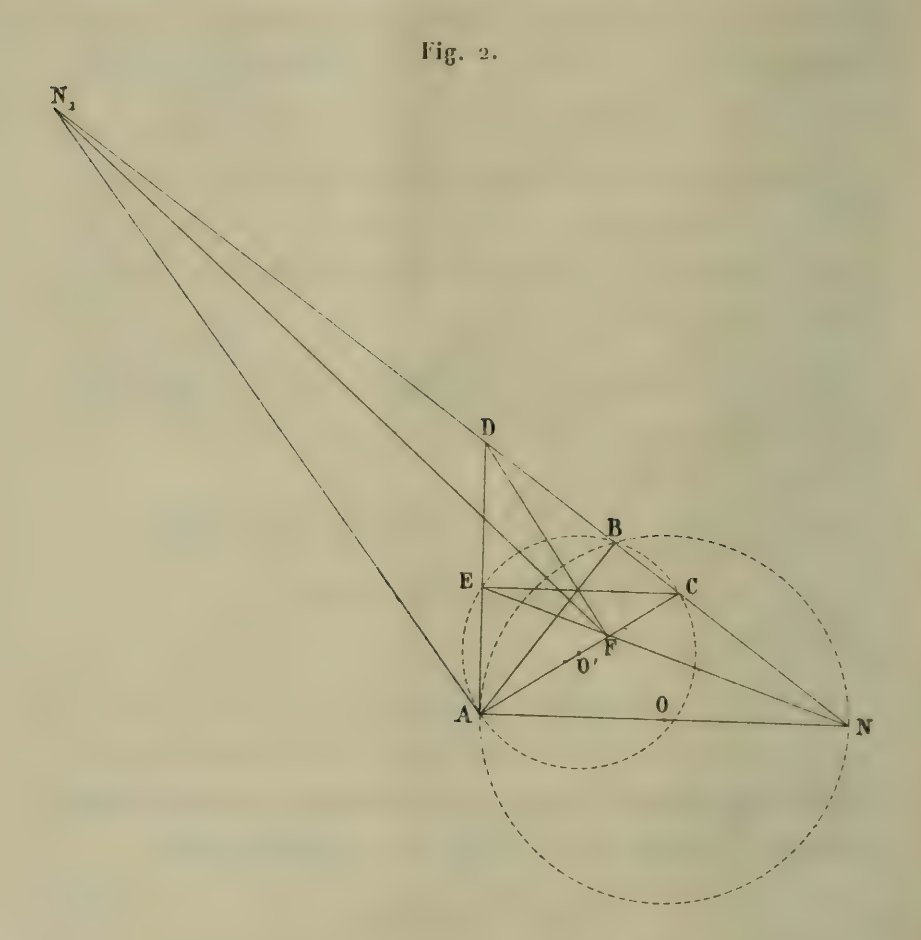
$$\chi = 90^\circ - \varphi.$$

II.

1. Considérons deux cercles O et O' passant par les points A et B et le diamètre AN du premier cercle; soit M' un point quelconque de O' : la perpendiculaire

élevée au point A sur AM′ rencontre NM′ en un point M dont le lieu est une cubique nodale circulaire. Les tangentes au point double A sont la tangente AD au cercle O

Fig. 2.



et la droite AO′; la normale AN_1 à AO′ rencontre la cubique au point N_1 correspondant à l'extrémité C du diamètre AO′; donc les quatre points N, C, B, N_1 sont en ligne droite; mais NB est parallèle à l'asymptote réelle de la cubique; par conséquent :

Dans une cubique nodale circulaire, la droite qui joint les extrémités des normales au point double est parallèle à l'asymptote.

2. Soit E le point d'intersection de AD avec le cercle O'; en cherchant le point infiniment voisin du point N sur la cubique, on voit que la tangente en ce point est la droite NE; mais EC est perpendiculaire sur AD; donc :

Les tangentes aux extrémités N *et* N_1 *des normales au point double* A *d'une cubique circulaire rencontrent les côtés opposés du triangle formé par les tangentes au point* A *et la droite* NN_1 *aux pieds des hauteurs.*

3. Si le cercle O' est tangent en A au diamètre AN, les tangentes au point double coïncident et l'on a une cubique cuspidale; donc :

La tangente à l'extrémité de la normale au point de rebroussement d'une cubique circulaire est parallèle à l'asymptote.

4. Si l'on transforme par l'inversion le théorème I de notre Note *Sur la courbure dans les coniques* (*Nouvelles Annales,* août 1888), on obtient le théorème suivant :

Par le point double d'une cubique nodale circulaire, on mène une sécante rencontrant aux points M *et* m *la cubique et la parallèle menée à l'asymptote par le milieu de la distance du point double à cette droite. La symétrique* M_1 *du point* M *par rapport au point* m *décrit un cercle, ayant son centre sur la perpendiculaire au point* A *à la droite qui joint ce point au tangentiel du point réel à l'infini de la cubique.*

SUR L'ADDITION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE, DEUXIÈME ET TROISIÈME ESPÈCE;

Par M. DOLBNIA.

1. Le célèbre théorème d'Abel, exposé dans le Mémoire *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (¹), se rapporte, comme on le sait, à l'addition de toutes les fonctions transcendantes ayant des différentielles algébriques. A l'aide de ce théorème, comme nous verrons, on obtient, d'une manière très simple, les formules d'addition des arguments de première, deuxième et troisième espèce. Quoique la question qui nous occupe soit à peu près épuisée, néanmoins une façon nouvelle de la poser mérite peut-être quelque attention.

Nous nous proposons, *a priori*, de rechercher les valeurs de x pour lesquelles

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

s'exprime par une fonction rationnelle et entière de x (²). Ces valeurs se déterminent par l'équation algébrique

$$(1) \qquad \Delta x = a + bx + ex^2 + \ldots + lx^m$$

ou

$$(2) \qquad (\Delta x)^2 - (a + bx + cx^2 + \ldots + lx^m)^2 = 0,$$

dont le degré et les coefficients sont des quantités arbi-

(¹) *Œuvres complètes*, t. I, p. 518; 1881.

(²) L'idée fondamentale développée ici est indiquée dans l'ouvrage de M. Halphen (*Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 30, 58, 215; 1886).

traires. Si nous désirons que les équations (2) aient p racines arbitraires

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p, \qquad p < m,$$

nous prendrons dans la première partie de l'équation p coefficients arbitraires.

Une si grande généralité de l'équation (2) permet de traiter la question de l'addition des arguments elliptiques de différentes manières. Pour le but proposé, il suffit que l'équation (2) ait trois racines, et par conséquent deux coefficients arbitraires. Dans l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, p. 688; 1875), on donne à l'équation fondamentale la forme suivante

$$(\Delta x)^2 - (1 + px + qx^2)^2 = 0.$$

Au moyen de cette forme, on voit de suite que, après la disparition du facteur x, il reste une équation du troisième degré, qui, par conséquent, aura trois racines. On peut disposer arbitrairement de deux de ces racines, car les coefficients p et q sont indéterminés.

Abel (¹), et après lui d'autres auteurs (²), donnent à l'équation (2) la forme

$$(3) \qquad (1 - x^2)(1 - k^2x^2) - (\alpha x + \beta x^3)^2 = f(x) = 0.$$

Cette équation a six racines

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3.$$

Si x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation

$$\Delta x - (\alpha x + \beta x^3) = 0,$$

(¹) *Œuvres complètes*, t. I, p. 538; 1881.

(²) J. Bertrand, *Calcul intégral*, p. 582; 1870.

les racines $(-x_1)$, $(-x_2)$, $(-x_3)$ satisferont à l'équation

$$\Delta x + \alpha x + \beta x^3 = 0.$$

Prenant la différentielle totale de (3), nous aurons

$$f'(x)\,dx - 2\,\Delta x(x\,d\alpha + x^3\,d\beta) = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2\frac{x}{f'(x)}d\alpha + 2\frac{x^3}{f'(x)}d\beta$$

ou

$$\frac{x^2\,dx}{\Delta x} = 2\frac{x^3}{f'(x)}d\alpha + 2\frac{x^5}{f'(x)}d\beta;$$

par conséquent,

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2\,dx_i}{\Delta x_i} = 2\,d\alpha\sum_1^3\frac{x_i^3}{f'(x_i)} + 2\,d\beta\sum_1^3\frac{x_i^5}{f'(x_i)}.$$

D'après le théorème bien connu d'Euler (¹), nous aurons

$$\sum_1^3\frac{x_i^3}{f'(x_i)} = 0,$$

$$\sum_1^3\frac{x_i^5}{f'(x_i)} = -\frac{1}{2\beta^2},$$

donc

$$\sum_1^3\frac{x_i^2\,dx_i}{\Delta x_i} = -\frac{d\beta}{\beta^2},$$

d'où

$$\int_0^{x_1}\frac{x_i^2\,dx_i}{\Delta x_i} + \int_0^{x_2}\frac{x_2^2\,dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3}\frac{x_3^2\,dx_3}{\Delta x_3} = \frac{1}{\beta} + \text{const.}$$

(¹) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 216, 217; 1886.

Dans cette équation, on peut disposer arbitrairement des racines x_1 et x_2. Supposons $x_1 = x_2 = 0$, il en résulte nécessairement $x_3 = 0$ (¹), et comme $\frac{1}{\beta^2} = x_1^2 x_2^2 x_3^2$, si nous avons $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on obtient

$$\frac{1}{\beta} = 0;$$

donc

$$\text{const.} = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1^2\,dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{x_2^2\,dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3^2\,dx_3}{\Delta x_3} = x_1 x_2 x_3.$$

Remarque. — La propriété des racines x_1, x_2, x_3, par laquelle, si $x_1 = x_2 = 0$, on a

$$x_3 = 0,$$

peut être démontrée de la manière suivante. Nous avons

$$\alpha x_1 + \beta x_1^3 - \Delta x_1 = 0,$$
$$\alpha x_2 + \beta x_2^3 - \Delta x_2 = 0,$$
$$\alpha x_3 + \beta x_3^3 - \Delta x_3 = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 & \Delta x_1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant $x_1 = 0$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^2 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_2^3 \\ x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 \\ 1 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_3^2 = x_2^2.$$

(¹) Bertrand, *Calcul intégral*, p. 581; 1870.

Si donc $x_2 = 0$, nous aurons

$$x_3 = 0.$$

2. De l'équation

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2\frac{x}{f'(x)}d\alpha + 2\frac{x^3}{f'(x)}d\beta,$$

on déduit

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\Delta x_i} = 2\,d\alpha \sum_1^3 \frac{x_i}{f'(x_i)} + 2\,d\beta \sum_1^3 \frac{x^3}{f'(x_i)},$$

d'où

$$(5) \qquad \int_0^{x_1} \frac{dx_i}{\Delta x_i} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{\Delta x_3} = 0.$$

Posons

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\Delta x} = u_1 \qquad \int_0^{x_2} \frac{dx}{\Delta x} = u_2, \qquad \int_0^{x_3} \frac{dx}{\Delta x} = u_3;$$

nous avons

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$
$$u_3 = -(u_1 + u_2),$$
$$x_1 = \lambda u_1, \qquad x_2 = \lambda u_2, \qquad x_3 = \lambda u_3.$$

L'équation (4) nous donnera

$$(6)\quad \begin{cases} -\lambda u_1\,\lambda u_2\,\lambda(u_1+u_2) \\ \quad = \int_0^{u_1} \lambda^2 u_1\,du_1 + \int_0^{u_2} \lambda^2 u_2\,du_2 + \int_0^{u_3} \lambda^2 u\,du. \end{cases}$$

Supposons que u_3 soit une quantité constante, alors

$$du_1 = -du_2.$$

En différentiant (6) relativement à u_1, nous aurons

$$-\lambda(u_1 + u_2)(\mu u_1\,\nu u_1\,\lambda u_2 - \mu u_2\,\nu u_2\,\lambda u_1) = \lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2.$$

d'où

$$\lambda(u_1 + u_2) = \frac{\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2}{\lambda u_1\, \mu u_2\, \nu u_2 - \lambda u_2\, \mu u_1\, \nu u_1},$$

ou

$$(8) \qquad \lambda(u_1 + u_2) = \frac{\lambda u_1\, \mu u_2\, \nu u_2 + \lambda u_2\, \mu u_1\, \nu u_1}{1 - k^2 \lambda^2 u_1 \lambda^2 u_2}.$$

Nous voyons avec quelle simplicité on obtient la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques proprement dites. L'addition des arguments elliptiques du n° 3, troisième espèce, est obtenue tout aussi simplement, quoique le calcul en soit plus compliqué.

Nous avons évidemment

$$\frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x} = \frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2) f'(x)}\, d\alpha + \frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2) f'(x)}\, d\beta.$$

En décomposant les deux fractions

$$\frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2) f'(x)}, \quad \frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2) f'(x)}$$

d'après les règles bien connues, nous aurons

$$\frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2) f'(x)} = \frac{a^2}{f'(a)}\left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x}\right) + \frac{\varphi(x)}{f'(x)},$$

$$\frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2) f'(x)} = \frac{a^4}{f'(a)}\left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x}\right) + \frac{\xi(x)}{f'(x)};$$

ici le degré de $\varphi(x)$ est moindre que le degré de $f'(x)$, et le degré de $\xi(x)$ moindre que le degré $f'(x)$.

Par cette raison,

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right)\Delta x} = \left(\frac{a^2}{f'(a)}\, d\alpha + \frac{a^4}{f'(a)}\, d\beta\right) \sum_1^3 \left(\frac{1}{a - x_i} + \frac{1}{a - x_i}\right).$$

Mais

$$\sum_1^3 \left(\frac{1}{a - x_i} + \frac{1}{a - x_i} \right) = \frac{f'(a)}{f(a)};$$

par conséquent,

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a^2}{f(a)} d\alpha - \frac{a^4}{f(a)} d\beta.$$

En posant $\alpha a + \beta a^3 = \zeta$, nous avons

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{(\Delta a)^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2 \Delta a} \left(\frac{1}{\Delta a + \zeta} + \frac{1}{\Delta a - \zeta} \right)$$

et, par suite,

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{2 \Delta a} \log \left(\frac{\Delta a + \alpha a + \beta a^3}{\Delta a - \alpha a - \beta a^3} \right)^2 + \mathrm{C}.$$

Si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on obtient

$$\beta = \infty, \qquad \alpha = \infty, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \infty,$$

par conséquent $\mathrm{C} = 0$; donc

$$\sum_1 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{2 \Delta a} \log \left(\frac{\alpha a + \beta a^3 + \Delta a}{\alpha a + \beta a^3 - \Delta a} \right)^2.$$

4. L'équation d'Abel

(1) $$1 - (1 + k^2) x^2 + k^2 x^4 - (\alpha x + \beta x^3)^2 = 0$$

se transforme en celle-ci

$$\frac{1}{x^6} - (1 + k^2) \frac{1}{x^4} + \frac{k^2}{x^2} - \left(\frac{\alpha}{x^2} + \beta \right)^2 = 0.$$

En remarquant que $\frac{1}{x^2}$ est la fonction linéaire et en-

tière de la fonction pu (Weierstrass), l'équation (1), relativement à la fonction pu, sera de la forme

$$(2) \qquad f(x) = 4p^3u - g_2 pu - g_3 - (apu + b)^2 = 0,$$
$$pu = x.$$

M. Halphen emploie cette équation dans son important ouvrage, que nous avons eu déjà l'occasion de citer. Par un raisonnement très simple, on obtient

$$du = 2\frac{db}{f'(x)} + 2\frac{x}{f'(x)}da,$$
$$(3) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = \text{une période}.$$

D'ailleurs,

$$\sum pu_1\, du_1 = 2\sum \frac{x_1\, db}{(f'x_1)} + 2\sum \frac{x_1^2\, da}{(f'x_1)}.$$

Or

$$\sum \frac{x_1}{f'(x_1)} = 0, \qquad \sum \frac{x_1^2}{f'(x_1)} = \frac{1}{4};$$

par conséquent,

$$\sum pu_1\, du_1 = \frac{da}{2},$$

$$(4) \quad \sum \int pu_1\, du_1 = \frac{a}{2} + \text{const.} = \pm\sqrt{pu_1 + pu_2 + pu_3 + C}.$$

Posons $u_3 = \text{const.}$; alors $du_1 = - du_2$.

En différentiant (4) relativement à u_1, nous aurons

$$(5) \qquad pu_1 - pu_2 = \pm \frac{p'u_1 - p'u^2}{2\sqrt{pu_1 + pu_2 + pu_3}},$$

d'où

$$(\text{A}) \qquad pu_1 + pu_2 + pu_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}\right)^2.$$

C'est la première formule fondamentale.

De l'équation (4) on déduit

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left[\frac{1}{u_1} - \int_0^u \left(\frac{1}{u_1^2} - pu_1 \right) du_1 \right] \\ &\quad = i\sqrt{pu_1 + pu_2 + pu_3 + C}, \end{aligned} \right.$$

où $i = \pm 1$.

Posons $u_1 + u_2 + u_3 = 0$,

$$\frac{1}{u} - \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - pu \right) du = \zeta(u);$$

nous aurons

$$\zeta(u_1) + \zeta(u_2) - \zeta(u_1 + u_2) = \frac{i}{2}\,\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2} + C,$$

d'où

$$\zeta(u_1) - \zeta(u_2) - \zeta(u_1 - u_2) = \frac{i}{2}\,\frac{p'u_1 + p'u_2}{pu_1 - pu_2} + C,$$

$$2\zeta(u_1) - [\zeta(u_1 - u_2) + \zeta(u_1 + u_2)] = i\,\frac{p'u_1}{pu_1 - pu_2} + 2C.$$

Posons $u_1 = \omega$ (une demi-période) : alors

$$\zeta(\omega) = \eta, \qquad \zeta(\omega - u_2) + \zeta(\omega + u_2) = 2\eta, \qquad p'\omega = 0;$$

par conséquent,

$$C = 0,$$

et

$$\zeta(u_1) - \zeta(u_2) - \zeta(u_1 - u_2) = \frac{i}{2}\,\frac{p'u_1 + p'u_2}{pu_1 - pu_2}.$$

En posant ici $\lim(u_1) = 0$, nous voyons que la partie principale du premier membre de cette équation est $\frac{1}{u}$, et celle du second $-\frac{i}{u}$: par conséquent,

$$i = -1.$$

et l'on a

$$\zeta(u_1) - \zeta(u_2) - \zeta(u_1 - u_2) = -\frac{1}{2}\,\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}.$$

C'est la seconde formule fondamentale (HALPHEN, p. 138).

6. *Remarque.* — L'exactitude de l'équation

$$\sum_1^3 \int_0 \frac{x_i^2\,dx_i}{\Delta x_i} = -\,x_1 x_2 x_3$$

peut être démontrée comme il suit.

Posons

$$\sum_1^3 \int_0 \lambda^2 u_i\,du_i = k\,\lambda u_1\,\lambda u_2\,\lambda u_3,$$

où

$$k = \pm 1.$$

En différentiant relativement à u_1, on obtient

$$\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2 = -k\,\lambda(u_1 - u_2)(\lambda u_2\,\mu u_1\,\nu u_1 - \lambda u_1\,\mu u_2\,\nu u_2).$$

En posant ici $u_2 = 0$, nous aurons

$$\lambda^2 u_1 = k\,\lambda^2 u_1,$$

d'où

$$k = -1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOIDE ET LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX DU SECOND ORDRE;

Par M. le vicomte de SALVERT,
Docteur ès Sciences,
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

Si on laisse de côté le point de vue géométrique, pour n'envisager que les conséquences analytiques et le parti qu'on en peut tirer, le principal intérêt qui s'attache au problème de la détermination des lignes de courbure d'une surface donnée consiste en ce que la connaissance de ces lignes permettra de former immédiatement un système de coordonnées orthogonales sur cette surface, dont l'emploi facilitera notablement ensuite la solution de la plupart des questions soit géométriques, soit mécaniques, que l'on pourra se poser à propos de cette surface. En second lieu, cette solution supposée obtenue constituera un premier pas vers la solution d'un problème encore plus important, mais bien autrement difficile, à savoir la recherche d'un système triple orthogonal (en supposant qu'il en existe un) dont la surface donnée fasse partie. Aussi la solution du problème des lignes de courbure d'une surface donnée doit-elle toujours, à notre sens, être poursuivie sans perdre de vue ce but capital, et la méthode employée pour cette recherche nous semblera-t-elle meilleure ou moins bonne suivant qu'elle y tendra plus ou moins directement.

Or la plupart des auteurs des traités d'Analyse, lorsqu'ils veulent montrer, à propos de l'ellipsoïde, une

application de la méthode générale donnée pour cet objet, présentent la solution sous la forme donnée par Monge, laquelle suffit bien à la vérité pour mettre en relief la propriété géométrique essentielle de ces lignes de courbure, à savoir que leurs projections sur les plans principaux de la surface sont des ellipses ou des hyperboles, mais remplit fort mal par ailleurs la condition fondamentale que nous venons de rappeler, par suite de radicaux qui s'introduisent forcément dans ces équations, lorsque l'on veut représenter isolément l'un ou l'autre des deux systèmes de ces lignes de courbure.

Il nous a semblé que l'on pouvait, au contraire, diriger l'application de la méthode générale, c'est-à-dire l'intégration des équations classiques que l'on sait, de façon à donner pleine satisfaction à ce *desideratum*, en s'arrangeant pour obtenir cette même solution sous la forme symétrique, si simple et si commode, que donne immédiatement l'application du théorème de Dupin au système triple des surfaces homofocales du second ordre, mais sans supposer en quoi que ce soit, bien entendu, l'existence de ce système. Et, dès lors, cette solution une fois obtenue constituera une voie non seulement légitime, mais qui sera peut-être la plus logique et la plus naturelle (nous ne disons pas pour cela la meilleure et la plus rapide) pour arriver sans effort d'invention à la notion si féconde de ce remarquable système, notion en réalité fort compliquée, malgré l'apparence de simplicité qu'elle doit à sa merveilleuse symétrie, et que les illustres inventeurs Lamé et Jacobi posent d'emblée dans leurs Ouvrages, comme par une sorte de divination, sans avoir jamais fait connaître par quel enchaînement logique de raisonnements et de calculs ils étaient parvenus effectivement à la découvrir.

I. Il suffira pour cela de mettre à profit la remarque suivante :

Étant donnée une surface quelconque

$$F(x, y, z) = 0,$$

si l'on suppose que l'on ait déterminé par l'intégration de l'équation différentielle connue l'ensemble de ses lignes de courbure, et que l'on représente par λ et μ les paramètres correspondant à chacun des deux systèmes, cet ensemble sera alors défini par trois équations telles que

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = \lambda, \qquad F_2(x, y, z) = \mu,$$

et l'on obtiendra isolément soit le premier, soit le second système en associant la seconde ou la troisième de ces équations à la première, qui est par hypothèse l'équation de la surface donnée.

Or, si l'on suppose ces trois équations résolues par rapport à x, y, z, c'est-à-dire mises sous la forme

$$(2) \qquad x = f(\lambda, \mu), \qquad y = \varphi(\lambda, \mu), \qquad z = \psi(\lambda, \mu),$$

on pourra envisager ces trois dernières équations comme représentant isolément à volonté l'un ou l'autre des deux systèmes, à la condition d'y considérer comme une constante celui des deux paramètres λ ou μ qui lui est relatif, et l'autre comme une variable auxiliaire analogue au temps ou à l'arc de courbe, en fonction de laquelle les coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont exprimées, et qu'il y aura avantage dès lors, par une raison évidente de symétrie, à prendre pour variable indépendante dans tous les calculs relatifs à cette courbe.

Cela posé, l'équation différentielle des lignes de courbure, qui est en général, pour la surface $F(x, y, z) = 0$,

$$\begin{vmatrix} dx, & \frac{dF}{dx}, & d\left(\frac{dF}{dx}\right) \\ dy, & \frac{dF}{dy}, & d\left(\frac{dF}{dy}\right) \\ dz, & \frac{dF}{dz}, & d\left(\frac{dF}{dz}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

dans le cas particulier de l'ellipsoïde

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

est la suivante

$$\begin{vmatrix} dx, & \frac{x}{a^2}, & \frac{dx}{a^2} \\ dy, & \frac{y}{b^2}, & \frac{dy}{b^2} \\ dz, & \frac{z}{c^2}, & \frac{dz}{c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) dy\, dz + \frac{y}{b^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) dz\, dx$$
$$+ \frac{z}{c^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) dx\, dy = 0,$$

laquelle, en multipliant par $4xyz$, peut encore être écrite

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(b^2 - c^2)\frac{x^2}{a^2}\frac{2y\,dy}{b^2}\frac{2z\,dz}{c^2} \\ &+ (c^2 - a^2)\frac{y^2}{b^2}\frac{2z\,dz}{c^2}\frac{2x\,dx}{a^2} \\ &+ (a^2 - b^2)\frac{z^2}{c^2}\frac{2x\,dx}{a^2}\frac{2y\,dy}{b^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous envisageons d'abord spécialement le premier système de lignes de courbure au paramètre λ, et que nous nous proposions d'obtenir des équations sous

la forme (2), en y considérant, ainsi que nous l'avons expliqué, μ comme une variable auxiliaire, on aperçoit de suite qu'on pourra satisfaire aux deux équations (3) et (4) en prenant pour $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$ des fonctions linéaires de la variable indépendante μ, c'est-à-dire en posant

$$\frac{x^2}{a^2} = A_1\mu + A'_1, \qquad \frac{2x\,dx}{a^2} = A_1\,d\mu,$$
$$\frac{y^2}{b^2} = B_1\mu + B'_1, \qquad \frac{2y\,dy}{b^2} = B_1\,d\mu,$$
$$\frac{z^2}{c^2} = C_1\mu + C'_1, \qquad \frac{2z\,dz}{c^2} = C_1\,d\mu,$$

les coefficients A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 étant dès lors des fonctions de λ, car, par la substitution de ces valeurs, les deux équations (3) et (4) qui définissent les lignes de courbure, devenant

$$(A_1 + B_1 + C_1)\mu + A'_1 + B'_1 + C'_1 = 1,$$
$$[(b^2 - c^2)(A_1\mu + A'_1)B_1C_1 + (c^2 - a^2)(B_1\mu + B'_1)C_1A_1 + (a^2 - b^2)(C_1\mu + C'_1)A_1B_1]\,d\mu^2 = 0,$$

dont la seconde se réduit simplement à

$$A_1B_1C_1\left[(b^2 - c^2)\frac{A'_1}{A_1} + (c^2 - a^2)\frac{B'_1}{B_1} + (a^2 - b^2)\frac{C'_1}{C_1}\right]d\mu^2 = 0,$$

on voit immédiatement qu'elles seront vérifiées, en disposant des constantes de manière à satisfaire aux trois conditions

$$(5) \qquad A_1 + B_1 + C_1 = 0, \qquad A'_1 + B'_1 + C'_1 = 1,$$
$$(6) \qquad (b^2 - c^2)\frac{A'_1}{A_1} + (c^2 - a^2)\frac{B'_1}{B_1} + (a^2 - b^2)\frac{C'_1}{C_1} = 0.$$

On reconnaîtrait exactement de même que l'on obtiendra les équations du second système au paramètre μ.

en prenant pour $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$ les fonctions linéaires de λ

$$\frac{x^2}{a^2} = A_2\lambda + A'_2, \qquad \frac{y^2}{b^2} = B_2\lambda + B'_2, \qquad \frac{z^2}{c^2} = C_2\lambda + C'_2,$$

dans lesquelles les coefficients A_2, B_2, ..., C'_2, qui sont, par hypothèse, des fonctions de μ, vérifieraient les conditions

(7) $$A_2 + B_2 + C_2 = 0, \qquad A'_2 + B'_2 + C'_2 = 1,$$

(8) $$(b^2 - c^2)\frac{A'_2}{A_2} + (c^2 - a^2)\frac{B'_2}{B_2} + (a^2 - b^2)\frac{C'_2}{C_2} = 0.$$

Ainsi donc on pourra obtenir simultanément les trois équations des deux systèmes de lignes de courbure sous la forme (2), en prenant pour $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$ des expressions qui soient linéaires à la fois par rapport à λ et par rapport à μ. On satisfera à cette double condition de la façon la plus simple possible, en prenant pour ces quantités des expressions, telles que

(9) $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = A(\lambda + g)(\mu + l), \\ \dfrac{y^2}{b^2} = B(\lambda + h)(\mu + m), \\ \dfrac{z^2}{c^2} = C(\lambda + k)(\mu + n), \end{cases}$$

les coefficients A, B, C, g, h, k, l, m, n étant à présent de véritables constantes, auquel cas ceux que nous avons appelés précédemment A_1, B_1, ..., C'_1; A_2, ..., C'_2 auront alors pour expressions

$$A_1 = A(\lambda + g), \qquad B_1 = B(\lambda + h), \qquad C_1 = C(\lambda + k),$$
$$A'_1 = A(\lambda + g)l, \qquad B'_1 = B(\lambda + h)m, \qquad C'_1 = C(\lambda + k)n,$$
$$A_2 = A(\mu + l), \qquad B_2 = B(\mu + m), \qquad C_2 = C(\mu + n),$$
$$A'_2 = A(\mu + l)g, \qquad B'_2 = B(\mu + m)h, \qquad C'_2 = C(\mu + n)k.$$

Avec ces valeurs, les conditions (5) et (7) étant alors

$$\begin{aligned}
(A + B + C)\lambda + Ag + Bh + Ck &= 0,\\
(A + B + C)\mu + Al + Bm + Cn &= 0,\\
(Al + Bm + Cn)\lambda + Agl + Bhm + Ckn &= 1,\\
(Ag + Bh + Ck)\mu + Alg + Bmh + Cnk &= 1,
\end{aligned}$$

exigeront, pour être satisfaites quelles que soient λ et μ, c'est-à-dire quelle que soit la ligne de l'un ou l'autre système que l'on considère,

$$(10) \qquad A + B + C = 0, \qquad Agl + Bhm + Ckn = 1,$$

$$(11) \qquad Ag + Bh + Ck = 0, \qquad Al + Bm + Cn = 0.$$

Enfin les deux conditions (6) et (8) deviendront de même

$$(12) \qquad \begin{cases} (b^2 - c^2)l + (c^2 - a^2)m + (a^2 - b^2)n = 0,\\ (b^2 - c^2)g + (c^2 - a^2)h + (a^2 - b^2)k = 0. \end{cases}$$

Outre les conditions (10), (11), (12), une nouvelle équation entre les constantes résulte de ce que les deux systèmes de lignes de courbure se coupent orthogonalement, condition exprimée dans le cas actuel par l'équation

$$(13) \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0;$$

car, au point de rencontre, les cosinus directeurs de l'élément de ligne du premier système sont évidemment proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y}{\partial \mu}$, $\frac{\partial z}{\partial \mu}$, μ étant la variable indépendante pour cette courbe, et λ une constante; et de même les cosinus directeurs de l'élément de ligne du second système sont proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$, ces différentes dérivées étant les dérivées partielles que fournissent les expressions (2).

Or, si l'on a égard aux valeurs (9) de x, y, z, qui représentent ces expressions (2) dans le cas actuel et qui deviennent, en extrayant les racines,

$$(14)\quad \begin{cases} x = \pm a\sqrt{A(\lambda + g)(\mu + l)}, \\ y = \pm b\sqrt{B(\lambda + h)(\mu + m)}, \\ z = \pm c\sqrt{C(\lambda + k)(\mu + n)}; \end{cases}$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \pm \frac{a\sqrt{A}}{2}\sqrt{\frac{\mu + l}{\lambda + g}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \mu} = \pm \frac{a\sqrt{A}}{2}\sqrt{\frac{\lambda + g}{\mu + l}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \pm \frac{b\sqrt{B}}{2}\sqrt{\frac{\mu + m}{\lambda + h}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \pm \frac{b\sqrt{B}}{2}\sqrt{\frac{\lambda + h}{\mu + m}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \pm \frac{c\sqrt{C}}{2}\sqrt{\frac{\mu + n}{\lambda + k}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \mu} = \pm \frac{c\sqrt{C}}{2}\sqrt{\frac{\lambda + k}{\mu + n}};$$

la condition ci-dessus (13) est simplement, en multipliant par 4,

$$A a^2 + B b^2 + C c^2 = 0.$$

Si l'on joint cette dernière équation à la première équation (10), et qu'on les mette sous la forme

$$\frac{A}{b^2 - c^2} = \frac{B}{c^2 - a^2} = \frac{C}{a^2 - b^2} = G,$$

en introduisant une nouvelle indéterminée G, on voit qu'on pourra les remplacer par les trois autres

$$(15)\quad A = (b^2 - c^2)G, \quad B = (c^2 - a^2)G, \quad C = (c^2 - a^2)G,$$

et dès lors, en substituant ces valeurs dans les équations (11) et (10), et remarquant que les premières se confondent alors avec les équations (12), on voit que l'on n'a, en définitive, à satisfaire jusqu'ici qu'aux trois

seules conditions

$$(16)\quad \begin{cases} (b^2-c^2)l + (c^2-a^2)m + (a^2-b^2)n = 0, \\ (b^2-c^2)g + (c^2-a^2)h + (a^2-b^2)k = 0, \\ G[(b^2-c^2)gl + (c^2-a^2)hm + (a^2-b^2)kn] = 1. \end{cases}$$

Mais la symétrie complète manifestée entre les deux systèmes de lignes de courbure par ce fait, que cet ensemble de conditions subsiste quand on y permute ensemble les deux groupes (g, h, k), (l, m, n), impose de plus trois dernières conditions, qui achèvent de déterminer les constantes (ou plus exactement leurs rapports). Il faudra, en effet, dans ce même ordre d'idées, que, si l'on a obtenu par les formules (14), à l'aide de ces dernières équations (15) et (16), une solution du problème correspondant à un certain système de valeurs des coefficients g, h, k, l, m, n, G, on obtienne encore une nouvelle solution avec ces mêmes valeurs en permutant les paramètres λ et μ ou, ce qui revient au même, en écrivant dans les formules (14) g, h, k à la place de l, m, n, et *vice versa*. Dès lors, il est nécessaire, pour l'identification des valeurs (9) ou (14) correspondant aux deux solutions, que l'on ait

$$g = l, \qquad h = m, \qquad k = n.$$

Étant données ces nouvelles conditions, le mode le plus simple de satisfaire aux deux premières équations (16) consiste à prendre

$$(17)\quad \begin{cases} \text{soit} \quad g = l = 1, \qquad h = m = 1, \qquad k = n = 1, \\ \text{soit} \quad g = l = a^2, \qquad h = m = b^2, \qquad k = n = c^2. \end{cases}$$

La première de ces deux solutions est inadmissible, parce qu'il en résulterait par la dernière équation (16) pour G, et, par conséquent, par les équations (15) pour A, B, C, des valeurs infinies. En adoptant donc la se-

conde, on aura, au contraire,

$$(18)\quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{(b^2-c^2)a^4+(c^2-a^2)b^4+(a^2-b^2)c^4} \\ \quad = \dfrac{1}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)} \end{cases}$$

et, par suite, pour A, B, C, par les équations (15),

$$A = \frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$B = \frac{1}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$C = \frac{1}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

En reportant enfin ces valeurs, ainsi que celles (17) de g, h, k, l, m, n, dans les expressions (9), on aura définitivement, pour les équations de l'ensemble des lignes de courbure de la surface proposée (3),

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{cases}$$

La solution du problème des lignes de courbure étant ainsi obtenue sous la forme (2), on pourra la mettre sous la forme des équations (1), en écrivant tout d'abord ces trois dernières équations de la façon suivante, eu égard à la seconde expression (18) de G,

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{b^2-c^2}{-G}\,[a^4+(\lambda+\mu)a^2+\lambda\mu], \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{c^2-a^2}{-G}\,[b^4+(\lambda+\mu)b^2+\lambda\mu], \\ \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{a^2-b^2}{-G}\,[c^4+(\lambda+\mu)c^2+\lambda\mu], \end{cases}$$

puis ces dernières elles-mêmes, en les multipliant respectivement en premier lieu par $\frac{a^2}{a^2+\lambda}$, $\frac{b^2}{b^2+\lambda}$, $\frac{c^2}{c^2+\lambda}$, puis en second lieu par $\frac{a^2}{a^2+\mu}$, $\frac{b^2}{b^2+\mu}$, $\frac{c^2}{c^2+\mu}$, ce qui les transformera dans les suivantes :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2+\lambda} &= \frac{a^2(b^2-c^2)}{-G}(a^2+\mu), \\ \frac{y^2}{b^2+\lambda} &= \frac{b^2(c^2-a^2)}{-G}(b^2+\mu), \\ \frac{z^2}{c^2+\lambda} &= \frac{c^2(a^2-b^2)}{-G}(c^2+\mu); \\ \frac{x^2}{a^2+\mu} &= \frac{a^2(b^2-c^2)}{-G}(a^2+\lambda), \\ \frac{y^2}{b^2+\mu} &= \frac{b^2(c^2-a^2)}{-G}(b^2+\lambda), \\ \frac{z^2}{c^2+\mu} &= \frac{c^2(a^2-b^2)}{-G}(c^2+\lambda); \end{aligned}\right.$$

dès lors, en ajoutant membre à membre, d'une part les trois équations (20), et d'autre part les trois équations de chaque ligne du groupe (21), et tenant compte de la première expression (18) de G, on obtiendra

$$(22)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ &\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1, \\ &\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1. \end{aligned}\right.$$

Les lignes de courbure appartenant à chacun des deux systèmes sont donc tracées sur l'ellipsoïde par deux familles de surfaces du second ordre, à centre unique, homofocales entre elles et avec la surface proposée, c'est-à-dire dont les sections principales admettent les mêmes foyers. La condition que chacune d'elles doit remplir

forcément de couper en un point réel à la fois la surface proposée et toutes les surfaces de l'autre famille exige que chacune des trois surfaces (22) appartienne à une variété différente, c'est-à-dire que les deux dernières soient deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes.

II. Ce résultat important étant acquis, quelques mots suffiront maintenant pour s'élever de là à la notion du système orthogonal des surfaces du second ordre et du même coup pour poser les formules fondamentales du système des coordonnées elliptiques.

En effet, l'identité de forme que présentent les équations des deux dernières surfaces (22) invite tout naturellement à appliquer la solution qui précède à une famille d'ellipsoïdes de même forme, c'est-à-dire ayant pour équation

$$(23) \qquad \frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1.$$

Il suffira évidemment pour cela de changer a^2 en $a^2+\nu$, b^2 en $b^2+\nu$ et c^2 en $c^2+\nu$ dans la solution (19) et dans les équations (22) qui en découlent. On aura ainsi tout d'abord pour les trois premières, en chassant les dénominateurs des premiers membres,

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned} \right.$$

Quant aux autres, c'est-à-dire aux deux dernières équations (22), il est clair que les deux familles de surfaces qu'elles représentent, étant complètement définies

par ces seules conditions d'avoir à la fois même centre, mêmes plans principaux et mêmes foyers pour les sections principales que la surface (3), tout en appartenant chacune à une variété différente, subsisteront sans modification lorsqu'on substituera à la surface particulière (3) la famille de surfaces (28) qui la comprend, et qui a toujours même centre, mêmes plans principaux et mêmes foyers qu'elle.

Or il est bien clair que la solution que nous venons d'obtenir ainsi pour l'ellipsoïde nous fournit en même temps celle relative à l'un et l'autre des deux hyperboloïdes, car nos raisonnements ni nos calculs ne supposent en quoi que ce soit que les constantes a^2, b^2, c^2 soient toutes trois positives; il faut seulement que l'une d'entre elles le soit, afin que la surface (3) ne soit pas imaginaire. Cela posé, vu l'analogie complète de forme entre les équations des trois familles (22) et (23), il résulte de ce qui précède que l'une quelconque d'entre elles est coupée par les deux autres suivant ses lignes de courbure, car tout ce que nous venons de dire s'applique indifféremment à toutes les trois; la tangente à l'intersection de deux quelconques de ces surfaces est donc normale à la troisième, ce qui revient à dire que les trois surfaces forment un système triple orthogonal.

Pour que les trois équations de même forme (22) et (23) représentent chacune une variété différente de surfaces du second ordre, il faut évidemment que le paramètre de chacune soit renfermé entre des limites qui lui soient propres. Or, si l'on suppose, suivant l'habitude, $a^2 > b^2 > c^2$, et si l'on convient d'appeler λ, μ, ν les paramètres correspondant respectivement à la famille d'hyperboloïdes à une nappe, à celle d'hyperboloïdes à deux nappes et à celle des ellipsoïdes, on aura tout d'abord comme condition nécessaire de réalité de ces trois

surfaces

$$a^2+\lambda>0, \qquad a^2+\mu>0, \qquad a^2+\nu>0;$$

le classement imposé des trois surfaces entre les trois variétés que nous venons de dire exigera en outre

$$b^2+\lambda<0, \qquad b^2+\mu>0, \qquad b^2+\nu>0,$$
$$c^2+\lambda<0, \qquad c^2+\mu<0, \qquad c^2+\nu>0,$$

c'est-à-dire simplement, en rapprochant les conditions précédentes,

$$(25) \qquad -a^2<\lambda<-b^2<\mu<-c^2<\nu.$$

On reconnaît de suite qu'en supposant λ, μ, ν astreintes à ces conditions, les expressions (24) fournissent constamment pour x, y, z des valeurs réelles. D'autre part, on s'assure sans peine, par des substitutions convenables dans le premier membre, que, quelles que soient x, y, z, l'équation du troisième degré en ρ

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1$$

a toujours ses trois racines réelles et séparées par les quantités $-a^2$, $-b$, $-c^2$ et $+\infty$, en sorte que l'on peut alors convenir de les désigner par λ, μ, ν. Il suit de là qu'à un point quelconque de l'espace correspondra un système de valeurs réelles, unique et parfaitement déterminé, des variables λ, μ, ν, condition nécessaire et suffisante pour que ce système de variables, renfermées par définition entre les limites (25), puisse être employé comme un système de coordonnées, et les équations (24) seront précisément les formules de transformation qui permettront de les introduire dans les calculs à la place des coordonnées rectilignes.

Bien que nous ne parvenions ainsi, en fin de compte, qu'à des résultats fort connus, nous ne pensons pas néanmoins que les développements qui précèdent doivent être regardés comme complètement inutiles, attendu que la marche et l'esprit de la méthode qu'ils ont pour but d'indiquer peuvent être essayés à propos d'autres surfaces que les surfaces du second ordre, et qu'ils pourront peut-être conduire ainsi un analyste plus habile à la découverte de nouveaux systèmes orthogonaux.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES;

PAR M. V. JAMET.

---

1. Lemme. — *Le polynôme entier, de degré n, $F(x)$, est identiquement nul, si l'on peut trouver des quantités a, b, c, ..., l, telles que l'on ait identiquement*

$$\begin{array}{llll} F(a)=0, & F'(a)=0, & \ldots, & F^{(\alpha-1)}(a)=0, \\ F(b)=0, & F'(b)=0, & \ldots, & F^{(\beta-1)}(b)=0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ F(l)=0, & F'(l)=0, & \ldots, & F^{(\lambda-1)}(l)=0 \end{array}$$

et

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda > n;$$

car, s'il en était autrement, l'équation $F(x)=0$ aurait α racines égales à a, β racines égales à b, ..., λ racines égales à l; par conséquent, plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré.

Il s'ensuit que *deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, dont le premier est de degré n, le second de degré m, sont*

identiques, si l'on a

$$\begin{array}{llll} f(a)=\varphi(a), & f'(a)=\varphi'(a), & \ldots & f^{(\alpha-1)}(a)=\varphi^{(\alpha-1)}(a), \\ f(b)=\varphi(b), & f'(b)=\varphi'(b), & \ldots & f^{(\beta-1)}(b)=\varphi^{(\beta-1)}(b), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots \\ f(l)=\varphi(l), & f'(l)=\varphi'(l), & \ldots, & f^{(\lambda-1)}(l)=\varphi^{(\lambda-1)}(l) \end{array}$$

et

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda > n \leq m;$$

car la fonction entière $f(x)-\varphi(x)$ est alors identiquement nulle.

2. Cela posé, soit $f(x)$ un polynôme entier de degré inférieur au degré de la fonction entière $F(x)$ définie comme il suit :

$$F(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

Soient aussi

$$\begin{aligned} \varpi_{\alpha}(x) &= (x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}, \\ \varpi_{\beta}(x) &= (x-a)^{\alpha}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{F(x)} = {} & \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\alpha-1}} D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_{\alpha}(a)}\right] \\ & + \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\beta-1}} D_b^{\beta-1}\left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_{\beta}(b)}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\lambda-1}} D_l^{\lambda-1}\left[\frac{f(l)}{(x-l)\varpi_{\lambda}(l)}\right]. \end{aligned}$$

La fonction $\varphi(x)$, définie par cette égalité, est une fonction entière, car l'expression

$$D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_{\alpha}(a)}\right] \tag{1}$$

est égale à une fonction rationnelle de x, dont le dénominateur est $(x-a)^{\alpha}$. Le produit de cette expression

par $F(x)$ est donc une fonction entière de x, et il en est de même pour tous les autres termes du second membre de l'égalité précédente ; il faut remarquer, en outre, que la fonction $\varphi(x)$ est d'un degré inférieur à celui de $F(x)$; car le numérateur de la fraction rationnelle équivalente à (1) est d'un degré inférieur à α ; de même, le deuxième terme est une fonction rationnelle, dont le numérateur est d'un degré inférieur à β, ...

3. Soit maintenant p un nombre entier inférieur à α ; proposons-nous de calculer la valeur que prend $\varphi^{(p)}(x)$, c'est-à-dire la dérivée d'ordre p de $\varphi(x)$ quand on y remplace x par a.

Observons, à cet effet, que la dérivée d'ordre p de l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\beta-1}} D_b^{\beta-1}\left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)}\right] F(x)$$

sera nulle, ainsi que les dérivées des expressions analogues, quand on y remplacera x par a ; il y aura exception pour l'expression suivante :

$$(2)\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\alpha-1}} D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)}\right] F(x).$$

Je dis que celle-ci sera égale à $f^{(p)}(a)$. En effet, si dans l'expression (2) on applique à la dérivée d'ordre $\alpha-1$ qu'elle renferme la formule qui fait connaître les dérivées successives du produit de deux fonctions données ; si l'on pose

$$\frac{f(a)}{\varpi_\alpha(a)} = \psi(a),$$

et si l'on multiplie tous les termes du développement obtenu par $F(x)$, ou $(x-a)^\alpha\varpi_\alpha(x)$, on voit que cette

expression est égale à

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\psi(a)\varpi_\chi(x) + \psi'(a)\frac{x-a}{1}\varpi_\chi(x) \\ &\qquad + \psi''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}\varpi_\chi(x) + \ldots \\ &\qquad + \psi^{(\alpha-1)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2.3\ldots\alpha-1}\varpi_\chi(x). \end{aligned} \right.$$

Dans ce dernier développement, considérons le terme

$$\psi^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{1.2.3\ldots i}\varpi_\chi(x)$$

et observons que sa dérivée d'ordre p est nulle pour $x = a$, si l'on suppose $i > p$. Dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{\psi^{(i)}(a)}{1.2.3\ldots i}\Big[(x-a)^i\varpi_\chi^{(p)}(x) + \frac{p}{1}i(x-a)^{i-1}\varpi^{(p-1)}(x) + \ldots \\ + p(p-1)(p-2)\ldots(p-i+1)\varpi_\chi^{(p-i)}(x)\Big].$$

Pour $x = a$, elle se réduit à

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.2.3\ldots i}\psi^{(i)}(a)\varpi_\chi^{(p-i)}(a).$$

Donc, pour $x = a$, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction (3) se réduit à

$$\psi(a)\varpi_\chi^{(p)}(a) + \frac{p}{1}\psi'(a)\varpi_\chi^{(p-1)}(a) \\ + \frac{p(p-1)}{1.2}\psi''(a)\varpi_\chi^{(p-2)}(a) + \ldots + \psi^{(p)}(a)\varpi_\chi(a),$$

c'est-à-dire à

$$D_p^\chi[\psi(a)\varpi_\chi(a)],$$

ou $f^{(p)}(a)$.

4. On conclut de là les identités suivantes :

$$\begin{array}{lllll} \varphi(a)=f(a), & \varphi'(a)=f'(a), & \varphi''(a)=f''(a), & \ldots & \varphi^{(\alpha-1)}(a)=f^{(\alpha-1)}(a), \\ \varphi(b)=f(b), & \varphi'(b)=f'(b), & \varphi''(b)=f''(b), & \ldots & \varphi^{(\beta-1)}(b)=f^{(\beta-1)}(b), \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi(l)=f(l), & \varphi'(l)=f'(l), & \varphi''(l)=f''(l), & \ldots & \varphi^{(\lambda-1)}(l)=f^{(\lambda-1)}(l). \end{array}$$

Donc la fonction φ est identique à la fonction f, et l'égalité qui définit la fonction $\varphi(x)$ constitue une formule propre à faire connaître un mode de décomposition de la fonction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples, savoir

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = & \frac{1}{1.2.3\ldots\alpha-1} D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)}\right] \\ & + \frac{1}{1.2.3\ldots\beta-1} D_b^{\beta-1}\left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)}\right] + \ldots \end{aligned}$$

POTENTIEL D'UN ELLIPSOIDE HOMOGÈNE OU COMPOSÉ DE COUCHES HOMOGÈNES CONCENTRIQUES, DONT LA DENSITÉ VARIE D'UNE COUCHE A LA SUIVANTE ;

Par M. A. ASTOR.

I. Considérons deux surfaces fermées S et S_1 homothétiques et infiniment voisines. Soient O le centre d'homothétie, v le volume de la couche comprise entre les deux surfaces. Un rayon issu de O les coupe en deux points A et A_1 infiniment voisins, pour lesquels les plans tangents sont parallèles. Menons la normale en A à S; elle coupe S_1 en un point B_1 infiniment voisin de A_1; la distance de B_1 au plan tangent en A_1 est d'ordre supérieur au premier, et, si nous appelons dn la dis-

tance AB_1, nous pouvons la supposer égale à la distance des deux plans tangents. Dès lors, P étant la perpendiculaire menée de O sur le plan tangent en A, nous aurons

$$dn = P\frac{dr}{r},$$

$\frac{dr}{r}$ étant le rapport constant $\frac{AA_1}{OA}$.

Si nous considérons sur S des points infiniment voisins de A, nous voyons que la longueur dn en ces différents points demeurera constante, aux infiniment petits d'ordre supérieur au premier près. Nous l'appellerons l'*épaisseur normale de la couche* au point A. Ceci posé, soient $d\sigma$ un élément superficiel de S en A et dv l'élément du volume de la couche, limité entre S, S_1, le contour de $d\sigma$ et les normales le long de ce contour; nous aurons

$$dv = d\sigma\, dn = P\, d\sigma \frac{dr}{r}.$$

Supposons qu'on ait pris des axes rectangulaires passant en O; nous aurons, avec les notations habituelles,

$$d\sigma = dx\, dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$P = \frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

de sorte que

$$dv = dx\, dy\frac{dr}{r}(z-px-qy).$$

Si l'équation de S est de la forme

$$f(x, y, z) = 1, \tag{1}$$

où f est une fonction homogène et de degré m,

$$z-px-qy$$

devient, d'après le théorème d'Euler, égal à $\frac{m}{f'_z}$, et l'on a

$$dv = m\,\frac{dx\,dy}{f'_z}\,\frac{dr}{r}.$$

Faisons maintenant la transformation homographique définie par les formules $x = \lambda x'$, $y = \mu y'$, $z = \nu z'$, où λ, μ, ν sont des constantes données; l'équation (1) se transformera en la suivante :

$$(2)\qquad \varphi(x', y', z') = f(\lambda x', \mu y', \nu z') = 1,$$

qui représente une surface S' dont les points x', y', z' correspondent individuellement aux points x, y, z de S. Considérons la couche comprise entre S' et une surface homothétique S'_1 infiniment voisine, définie par le rapport $\frac{dr'}{r'}$; nous aurons, pour l'élément dv' de cette couche correspondant à l'élément dv de la première,

$$dv' = \frac{m\,dx'\,dy'}{\varphi'_z}\,\frac{dr'}{r'} = \frac{m}{\lambda\mu\nu}\,\frac{dx\,dy}{f'_z}\,\frac{dr'}{r'},$$

de sorte que

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\,\frac{\frac{dr'}{r'}}{\frac{dr}{r}}.$$

Ce rapport étant constant est égal à celui des volumes des deux couches, et ces dernières peuvent être divisées en éléments correspondants qui sont dans le rapport des volumes des couches elles-mêmes.

Si nous considérons deux ellipsoïdes dont les équations seraient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

nous voyons qu'ils rentrent dans le cas précédent, en posant

$$\lambda = \frac{a}{a'}, \qquad \mu = \frac{b}{b'}, \qquad \nu = \frac{c}{c'},$$

et, pour le rapport de deux éléments correspondants de deux couches comprises, d'une part entre les ellipsoïdes d'axes a, b, c, $a + da$, $b + db$, $c + dc$, d'autre part entre les ellipsoïdes d'axes a', b', c', $a' + da'$, $b' + db'$, $c' + dc'$, satisfaisant aux conditions

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c},$$
$$\frac{da'}{a'} = \frac{db'}{b'} = \frac{dc'}{c'},$$

nous aurons

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{a'b'c'}{abc}\,\frac{\dfrac{da'}{a'}}{\dfrac{da}{a}} = \frac{b'c'\,da'}{bc\,da}.$$

II. Proposons-nous maintenant de calculer le potentiel d'un ellipsoïde E d'axes A, B, C, en un point M de coordonnées α, β, γ.

Nous supposerons d'abord l'ellipsoïde homogène et le point M extérieur. Décomposons E en couches infiniment minces par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques, et soient a, b, c, $a + da$, $b + db$, $c + dc$ les axes des ellipsoïdes e et e_1 qui limitent une de ces couches; calculons le potentiel de cette couche. Pour cela, par M faisons passer l'ellipsoïde e', d'axes a', b', c', homofocal à e, et formons une couche ellipsoïdale au moyen de e' et de l'ellipsoïde e'_1 homothétique à e' et d'axes $a' + da'$, $b' + db'$, $c' + dc'$. Sur e prenons l'homologue M' de M; soient u la distance d'un point D' de e à M, u' la distance, égale à u, de son homologue D sur e'

à M'; ρ étant la densité commune des deux couches v et v', nous aurons, en appelant dV et dV' les potentiels de v en M et de v' en M',

$$dV' = \rho \int \frac{dv'}{u'},$$

$$dV = \rho \int \frac{dv}{u} = \frac{bc\,da}{b'c'\,da'}\,dV'.$$

Pour avoir dV, il suffit donc de calculer dV' et de le multiplier par le rapport $\frac{bc\,da}{b'c'\,da'}$ des volumes des deux couches.

Le potentiel dV' étant indépendant de la position du point M' intérieur à la couche e', nous pouvons le calculer, et c'est ce que nous allons faire, en supposant le point au centre même de la couche. Calculons le potentiel de l'ellipsoïde e' au centre O. Considérons un cône infiniment délié de sommet O et d'ouverture $d\omega$ dont une nappe coupe e' en D'. Soient x', y', z', u' les coordonnées de D' et sa distance au centre. Le potentiel de la nappe est

$$\rho \int_0^{u'} u\,du\,d\omega = \rho\,d\omega\,\frac{u'^2}{2}.$$

Si nous posons

$$x' = u'\cos\theta, \qquad y' = u'\sin\theta\cos\psi, \qquad z' = u'\sin\theta\sin\psi,$$

nous pouvons faire

$$d\omega = \sin\theta\,d\theta\,d\psi;$$

d'autre part,

$$u'^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a'^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b'^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c'^2}};$$

le potentiel V' de e' est donc

$$\frac{\rho}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$\times\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\left(\frac{\cos^2\theta}{a'^2}+\frac{\sin^2\theta}{b'^2}\right)\cos^2\psi+\left(\frac{\cos^2\theta}{a'^2}+\frac{\sin^2\theta}{c'^2}\right)\sin^2\psi}.$$

En posant $\cos\theta = v$, on peut ramener immédiatement cette intégrale double, par un calcul connu, à la forme

$$2\pi\rho\frac{b'c'}{a'^2}a'^2\int_0^1\frac{dv}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le potentiel $V'+dV'$ de l'ellipsoïde e'_1, homothétique à e', s'obtiendra en remplaçant, dans la formule précédente, les axes a', b', c' par ceux de e'_1, et, comme $\frac{b'c'}{a'^2}$, $\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}$, $\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}$ ne changent pas, on voit que

$$dV' = 2\pi\rho\frac{b'c'}{a'^2}da'^2\int_0^1\frac{dv}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir dV, il suffit de multiplier dV' par $\frac{bc\,da}{b'c'\,da'}$, et, comme $da'^2 = 2a'\,da'$, on voit que

$$dV = 4\pi\rho\frac{bc\,da}{a'}\int_0^1\frac{dv}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Faisons le changement de variable donné par la formule

$$\frac{v}{a'} = \frac{u}{a},$$

remarquons que

$$b'^2-a'^2 = b^2-a^2, \qquad c'^2-a'^2 = c^2-a^2.$$

et posons, comme c'est l'usage,

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \frac{B^2 - A^2}{A^2} = \lambda^2, \qquad \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{C^2 - A^2}{A^2} = \lambda'^2;$$

il vient

$$dV = 4\pi\rho \frac{bc\,da}{a} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{du}{(1 + \lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} a\,da \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{du}{(1 + \lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le facteur $4\pi\rho \frac{BC}{A^2}$ est égal à $\frac{3M}{A^3}$, M étant la masse de E.

Remarquons que a' est donné par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{a'^2 + b^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{a'^2 + c^2 - a^2} = 1.$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{a'^2}{a^2}\right)} + \frac{\beta^2}{\frac{a'^2}{a^2}\left(1 + \lambda^2 \frac{a^2}{a'^2}\right)} + \frac{\gamma^2}{\frac{a'^2}{a^2}\left(1 + \lambda'^2 \frac{a^2}{a'^2}\right)} = a^2.$$

Si donc nous posons $\frac{a}{a'} = u$, nous voyons que

$$a^2 = u^2 \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1 + \lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1 + \lambda'^2 u^2}\right)$$

et

$$dV = \frac{3M}{2A^3} d\left[u^2 \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1 + \lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1 + \lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1 + \lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si nous appelons A′, B′, C′ les axes de l'ellipsoïde homofocal de E qui passe en M, u variera de 0 à $\frac{A}{A'}$, de sorte

que

$$V = \frac{3M}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} d\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrons par parties et remarquons que, pour $u = \frac{A}{A'}$, l'expression $u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)$ devient égale à A^2; il vient

$$V = \frac{3M}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \left[A^2 - u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons maintenant l'ellipsoïde, non plus homogène, mais composé de couches homogènes; le potentiel de la couche e, de densité ρ, peut s'écrire, v étant le volume de l'ellipsoïde,

$$dV = \frac{3v}{2A^3}\rho\, d\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ρ étant fonction de a ou a^2; posons

$$\rho\, da^2 = d\varphi(a^2)$$

ou

$$\rho\, d\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]$$
$$= d\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right];$$

la fonction φ se déterminera par une quadrature, et nous aurons

$$V = \frac{3v}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} d\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrant encore par parties, nous trouvons immédiatement

$$V = \frac{3v}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \left\{\varphi(A^2) - \varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]\right\}$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

formule qui comprend la première quand on suppose $\varphi(\alpha^2) = \rho a^2$, ρ étant la densité supposée constante.

Pour avoir les composantes de l'attraction de E sur M, il suffit de calculer $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial \beta}$, $\frac{\partial V}{\partial \gamma}$ et de les multiplier par le produit $f\mu$ de la constante de la loi de Newton et de la masse de M. Or V dépend de α, β, γ pour deux raisons : d'abord, parce que ces quantités entrent explicitement dans le terme

$$\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right],$$

puis, parce qu'elles entrent implicitement dans la limite supérieure $\frac{A}{A'}$ de l'intégrale définie, car A' est une fonction de α, β, γ donnée par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{A'^2} + \frac{\beta^2}{A'^2 + B^2 - A^2} + \frac{\gamma^2}{A'^2 + C^2 - A^2} = 1;$$

mais la dérivée de l'intégrale par rapport à $\frac{A}{A'}$, étant ce que devient la fonction de u qui multiplie du sous le signe $\int$ quand on y remplace u par $\frac{A}{A'}$, s'annule; car

$$\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$

devient, par cette substitution,

$$\varphi(A^2).$$

En remarquant que

$$\frac{d\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]}{d\,u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)} = \rho,$$

on trouve donc

$$X = -\frac{3v}{A^3}\alpha\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{\rho\, u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3v}{A^3}\beta\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{\rho\, u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = -\frac{3v}{A^3}\gamma\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{\rho\, u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce sont les formules connues.

Les expressions trouvées, dans les deux cas, pour le potentiel, supposent le point M extérieur à l'ellipsoïde; il est facile de voir que, à condition de remplacer la limite supérieure par l'unité, elles subsistent quand le point M est sur l'ellipsoïde ou à son intérieur. La chose

est évidente quand M est sur l'ellipsoïde. Supposons-le intérieur; par M faisons passer l'ellipsoïde homothétique; soient A_1, B_1, C_1 ses axes; le potentiel V se compose de la partie constante V_1 correspondant au volume compris entre les deux ellipsoïdes et du potentiel V_2 de l'ellipsoïde $A_1 B_1 C_1$.

Supposons la densité constante; le même raisonnement servirait dans le second cas. Nous avons d'abord

$$V_1 = \frac{3M}{A^3}\int_{A_1}^{A} a\,da \int_0^1 \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3\rho}{2A^3}\int_0^1 (A^2 - A_1^2)\frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

puis

$$V_2 = \frac{3M}{2A^3}\int_0^1 \left[A_1^2 - u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right] \times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

de sorte que

$$V = \frac{3M}{2A^3}\int \left[A^2 - u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right] \times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

C. Q. F. D.

L'équation générale des surfaces de niveau a l'une des deux formes

$$\int_0^{\frac{A}{A'}} \left[A^2 - u^2\left(x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda^2 u} + \frac{z^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right] \times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const.},$$

$$\int_0^{\frac{A}{A'}} \left\{ \varphi(A^2) - \varphi\left[u^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{z^2}{1+\lambda'^2 u^2} \right) \right] \right\} \times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const.}$$

Si la surface doit passer par un point extérieur, A' est une fonction de x, y, z déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{A'^2 + B^2 - A^2} + \frac{z^2}{A^2 + C^2 - A^2} = 1.$$

Si elle doit passer par un point situé sur l'ellipsoïde ou à son intérieur, la limite supérieure doit être remplacée par l'unité. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes, si la densité est constante; mais il n'en est plus de même si elle est variable. Elles peuvent être algébriques ou transcendantes. Si l'on supposait, par exemple, $\varphi(a^2) = k(a^2)^2$, les surfaces de niveau seraient, comme on le voit, du quatrième degré.

NOTE SUR LA QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1888;

Par M. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Lorient.

Transformant en coordonnées polaires l'équation de la courbe C, nous obtenons une équation de la forme

$$\rho^4 - 2F(\omega)\rho^2 + K = 0,$$

K étant indépendant de ω. Le produit des racines de cette équation est constant. Nous en concluons que la

courbe C est transformable en elle-même par rayons vecteurs réciproques, l'origine d'inversion étant le centre O de l'ellipse donnée, et la puissance $\sqrt{K}$. On sait que les courbes qui jouissent de cette propriété, auxquelles on a donné le nom de *courbes anallagmatiques,* sont des enveloppes de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, réel ou imaginaire, et ayant leurs centres sur une courbe fixe, dite *déférente.* Il est facile de trouver, dans le cas qui nous occupe, le cercle fixe et la déférente : celle-ci est une conique.

Cherchons, en effet, l'enveloppe d'un cercle

$$(x-p)^2+(y-q)^2-\rho^2=0$$

coupant orthogonalement le cercle fixe

$$x^2+y^2-R^2=0$$

et ayant son centre sur la conique

$$Ax^2+By^2-1=0;$$

ρ, p, q satisfont aux relations

$$Ap^2+Bq^2-1=0,$$
$$p^2+q^2=R^2+\rho^2.$$

L'équation du cercle variable peut s'écrire

$$(x-p)^2+(y-q)^2-p^2-q^2+R^2=0$$

ou

$$x^2+y^2-2px-2qy+R^2=0,$$

avec la condition

$$Ap^2+Bq^2-1=0.$$

Éliminons p et q entre ces deux relations et

$$\frac{Ap}{x}=\frac{Bq}{y};$$

nous avons

$$\frac{Ap}{x} = \frac{Bq}{y} = \frac{2(Ap^2 + Bq^2)}{2(px + qy)} = \frac{2}{x^2 + y^2 + R^2};$$

d'où

$$p = \frac{2x}{A(x^2 + y^2 + R^2)},$$

$$q = \frac{2y}{B(x^2 + y^2 + R^2)}.$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + R^2)^2 - 4\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}\right) = 0.$$

On trouve bien une équation de la forme de (C)

$$(C) \quad (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - \frac{4}{\text{tang}^2\theta}(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

L'identification donne

$$R^2 = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + \frac{4}{\text{tang}^2\theta}a^2b^2},$$

$$\frac{2}{A} = (a^2 + b^2) + \frac{2}{\text{tang}^2\theta}b^2 + R^2,$$

$$\frac{2}{B} = (a^2 + b^2) + \frac{2}{\text{tang}^2\theta}a^2 + R^2.$$

Pour simplifier l'écriture, conservons les notations (A, B, R). Tout ce que nous dirions de la courbe (1) s'appliquera à la courbe (C). (1) admet pour asymptotes les droites isotropes du plan. Donc on peut dire que tout cercle du plan a avec cette courbe aux points cycliques une bitangente imaginaire.

Un cercle la touchera donc en quatre points, s'il a avec elle deux points de contact à distance finie.

Or les cercles qui ont pour enveloppe (1) lui sont pré-

cisément bitangents : tout revient donc à chercher combien de ces cercles sont tangents à une droite donnée

$$(D) \qquad mx + ny + 1 = 0.$$

La condition de contact du cercle variable

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + R^2 = 0$$

avec la droite D est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -p & m \\ 0 & 1 & -q & n \\ -p & -q & R^2 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(np - mq)^2 - 2(mp + nq) = (m^2 + n^2)R^2 + 1.$$

Finalement, nous voyons que le centre de tout cercle répondant à la question se trouve à la fois sur les deux coniques

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0,$$
$$(nx - my)^2 - 2(mx + ny) = (m^2 + n^2)R^2 + 1.$$

Donc il y a au plus quatre cercles pareils.

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 114, log. 64270, *au lieu de* 8030083, *lisez* 8080083.

SUR LES PLANS DIAMÉTRAUX DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface du second ordre : si l'on coupe cette surface par des droites toutes parallèles entre elles et si l'on désigne par

$$x = x_0 + \alpha\rho,$$
$$y = y_0 + \beta\rho,$$
$$z = z_0 + \gamma\rho$$

les équations de l'une de ces droites, les points de rencontre de cette droite avec la surface sont donnés par l'équation du second degré en ρ

$$\rho^2 \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}) + f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$\varphi(x, y, z)$ étant l'ensemble homogène des termes du second degré de l'équation de la surface. Pour que le point (x_0, y_0, z_0) soit le milieu de la corde, il faut que l'équation en ρ ait ses racines égales et de signes contraires; si donc $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est différent de zéro, les coordonnées du point (x_0, y_0, z_0) devront satisfaire à l'équation

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0.$$

Le point (x_0, y_0, z_0) se trouve donc dans le plan

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Réciproquement, tout point de ce plan jouit de cette propriété que, si par un point quelconque de ce plan on mène une droite parallèle à la direction α, β, γ, le point

considéré est le point milieu de la corde correspondante.

Nous allons passer en revue les diverses surfaces du second ordre.

I. — Surfaces qui ont un centre unique à distance finie.

2. L'équation du plan diamétral de la direction α, β, γ est, comme nous l'avons vu,

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Cette équation nous montre que, dans le cas des surfaces à centre unique où les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ ont une solution, le plan diamétral passe par le point dont les coordonnées sont données par cette solution, et qui est le centre de la surface, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de α, β, γ. Tous les plans diamétraux, dans les surfaces à centre unique, passent donc par le centre.

3. Nous avons supposé jusqu'ici que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \gtrless 0$, c'est-à-dire que les cordes parallèles à la direction α, β, γ rencontrent effectivement en deux points la surface; le plan

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

est alors le lieu des points milieux de ces cordes.

Mais, dans le cas où le cône asymptotique de la surface $\varphi(x, y, z) = 0$ est réel, il existe une infinité de directions α, β, γ pour lesquelles $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; elles sont données par les génératrices du cône asymptotique: alors le plan

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

est le lieu des points tels que, si, par chaque point du

lieu, on mène une parallèle à la direction asymptotique, ces droites ne rencontrent plus la surface. Le lieu de tous ces points est un plan qu'on appelle le *plan asymptote :* c'est en même temps le lieu de toutes ces droites. On peut, en effet, écrire l'équation du plan diamétral sous la forme

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0.$$

La droite

$$x = x_0 + \alpha\rho,$$
$$y = y_0 + \beta\rho,$$
$$z = z_0 + \gamma\rho$$

est parallèle à ce plan, puisque

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma = 2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la droite ayant le point (x_0, y_0, z_0) dans ce plan, et lui étant parallèle, y est contenue tout entière.

Les plans diamétraux des directions asymptotiques sont aussi appelés les *plans diamétraux singuliers de la surface.*

Nous allons démontrer maintenant que le plan asymptote est un plan tangent au cône asymptote de la surface le long de la génératrice asymptotique de direction α, β, γ.

Pour le démontrer, nous allons faire voir que, si la direction α, β, γ des cordes se rapproche jusqu'à se confondre avec une génératrice du cône asymptotique, le plan diamétral correspondant tend à se confondre avec le plan tangent au cône asymptote le long de la génératrice asymptotique.

Soient

O le centre de la surface (*fig.* 1) que nous prenons pour origine des coordonnées;

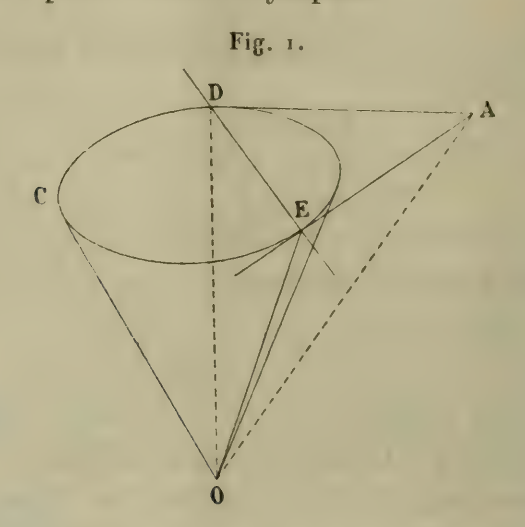
OA la droite de direction α, β, γ;

C la section faite dans le cône asymptote par un plan parallèle au plan des xy;

$$z = z_1$$

le plan diamétral de la direction OA est le même pour la surface et pour le cône asymptote.

Fig. 1.



Supposons que le point A soit dans le plan $z = z_1$: ses coordonnées seront

$$x_1 = \alpha r, \qquad y_1 = \beta r, \qquad z_1 = \gamma r.$$

Si l'on remplace α, β, γ par leurs valeurs tirées de ces équations dans l'équation du plan diamétral, nous aurons

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation de la polaire du point (x_1, y_1) par rapport à la courbe C, cette courbe étant rapportée à un système d'axes parallèles aux axes Ox, Oy menés par le point du plan de la courbe C, où l'axe des z rencontre ce plan, en faisant dans cette équation z et z_1 égaux à l'unité.

La polaire DE du point A n'est donc autre que la trace du plan diamétral de AO sur le plan de la courbe C.

On voit donc que, si la droite OA tend à se rapprocher d'une génératrice du cône asymptote, le point A se rapproche de la courbe C, et la polaire DE se rapproche de A; on voit donc que, si le point A vient en un point quelconque de la courbe C, la droite DE devient tangente à la courbe en ce point, et le plan diamétral de la direction limite de OA devient alors tangent au cône asymptote le long de la génératrice avec laquelle vient se confondre OA.

4. Nous avons vu que tous les plans diamétraux passent par le centre. Inversement, tout plan qui passe par le centre de la surface est diamétral d'une certaine direction de cordes. Proposons-nous de trouver cette direction.

Soit

$$ax + by + cz + d = 0$$

l'équation du plan donné; il sera diamétral de la direction α, β, γ si l'on a

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d}.$$

Soit λ la valeur commune de ces rapports : on aura les relations

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma - \lambda a &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma - \lambda b &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma - \lambda c &= 0,\\
C\alpha + C'\beta + C''\gamma - \lambda d &= 0.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations devant être satisfaites pour des valeurs de α, β, γ, λ non toutes nulles, le déterminant

$$\begin{vmatrix}
A & B'' & B' & a\\
B'' & A' & B & b\\
B' & B & A'' & c\\
C & C' & C & d
\end{vmatrix}$$

devra être nul. Cette condition exprime que le plan donné passe par le centre. Les trois premières équations déterminent α, β, γ en fonction de λ sous la forme

$$\alpha = \alpha_0 \lambda, \qquad \beta = \beta_0 \lambda, \qquad \gamma = \gamma_0 \lambda,$$

α_0, β_0, γ_0 ayant des valeurs parfaitement déterminées, puisque le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro; l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

déterminera pour λ deux valeurs égales et de signes contraires, qui fournissent deux directions α, β, γ de signes contraires, et par suite une seule direction de cordes.

II. — Paraboloïdes.

5. Nous supposerons d'abord que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ soit différent de zéro; l'équation du plan diamétral de la direction $\alpha\beta\gamma$ est, comme précédemment,

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Nous allons montrer que tous ces plans diamétraux sont parallèles à une même droite, l'axe du paraboloïde.

En effet, pour que la surface soit un paraboloïde, il faut que deux des plans des centres se coupent suivant une droite à distance finie; nous supposerons, dans ce qui suit, que les deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ se coupent. Il s'ensuit que les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} B'' & B' \\ A' & B \end{vmatrix}$$

ne sont pas nuls à la fois; admettons que

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Le déterminant du système $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$ est nul, mais le caractéristique du troisième ordre

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro si la surface est un paraboloïde, autrement la surface admettrait une ligne de centres.

Des deux conditions précédentes, on déduit l'identité

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y \\ B' & B & \frac{1}{2}f'_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z + \pi = 0,$$

où ν et π sont différents de zéro; cette équation peut donc être résolue par rapport à f'_z; on a identiquement

$$f'_z = -\frac{1}{\nu}(\lambda f'_x + \mu f'_y + \pi),$$

et l'équation du plan diamétral devient

$$\alpha f'_x + \beta f'_y - \frac{\gamma}{\nu}(\lambda f'_x + \mu f'_y + \pi) = 0$$

ou

$$f'_x(\alpha\nu - \gamma\lambda) + f'_y(\beta\nu - \gamma\mu) - \gamma\pi = 0;$$

on voit, sous cette forme, que tous les plans diamétraux sont parallèles à la droite d'intersection des deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ qui se coupent suivant la droite dans la direction de laquelle le centre est rejeté à l'infini; cette

droite est parallèle à l'axe : nous dirons que les deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ définissent la direction de l'axe de la surface.

6. Pour que les plans diamétraux correspondant à deux directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ soient parallèles entre eux, il faut que les directions considérées soient parallèles à un même plan, parallèle à l'axe de la surface.

En effet, si les plans

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta - z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta - C''\gamma) = 0,$$
$$x\varphi'_{\alpha'} + y\varphi'_{\beta'} - z\varphi'_{\gamma'} - 2(C\alpha' - C'\beta' - C''\gamma') = 0$$

sont parallèles, on aura

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}};$$

mais, de l'identité

$$\lambda f'_x - \mu f'_y - \nu f'_z + \pi = 0,$$

on déduit

$$\lambda\varphi'_\alpha - \mu\varphi'_\beta - \nu\varphi''_\gamma = 0,$$
$$\lambda\varphi'_{\alpha'} - \mu\varphi'_{\beta'} + \nu\varphi'_{\gamma'} = 0.$$

Il est aisé de voir que la seule relation

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}}$$

entraîne le parallélisme des deux plans.

On a, en effet,

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta}{\lambda\varphi'_{\alpha'} + \mu\varphi'_{\beta'}} = \frac{-\nu\varphi'_\gamma}{-\nu\varphi'_{\gamma'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}}.$$

Or, de l'égalité

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}},$$

on déduit

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} = \frac{\varphi'_{\alpha'}}{\varphi'},$$

et, si l'on désigne par m la valeur commune de ces rapports, on voit que les deux directions α, β, γ, α', β', γ' sont situées dans le plan

$$\varphi'_x - m\varphi'_y = 0,$$

qui est parallèle au plan

$$f'_x - m f'_y = 0$$

et, par suite, la proposition est démontrée.

Inversement, si la direction des cordes est contenue dans un plan parallèle à l'axe, les plans diamétraux correspondants sont parallèles entre eux. En effet, si

$$\varphi'_x - m\varphi'_y = 0,$$

est le plan auquel les cordes restent parallèles, on aura

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} = \frac{\varphi'_{\alpha'}}{\varphi'_{\beta'}} = m,$$

d'où

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta}{\lambda\varphi'_{\alpha'} + \mu\varphi'_{\beta'}} = \frac{-\nu\varphi'_\gamma}{-\nu\varphi'_{\gamma'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}};$$

les plans diamétraux conjugués des directions α, β, γ, α', β', γ sont donc parallèles.

7. Le plan diamétral dans les paraboloïdes n'est indéterminé pour aucune direction de cordes, et il est rejeté à l'infini pour une seule direction, qui est celle de l'axe.

En effet, pour que le plan diamétral de la direction $\alpha\beta\gamma$ soit indéterminé, il faut que l'on ait à la fois

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0,\\
C\alpha + C\beta + C''\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces équations montrent que les trois caractéristiques du troisième ordre des équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ sont nuls; cela n'est pas possible, car la surface serait un cylindre; le plan diamétral dans les paraboloïdes ne peut donc être indéterminé pour aucune direction de cordes.

Le plan diamétral n'est rejeté à l'infini que pour une seule direction des cordes conjuguées. Les équations

$$\begin{aligned} A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0 \end{aligned}$$

sont compatibles, et les deux premières équations nous donnent

$$\alpha = \alpha_0\gamma, \qquad \beta = \beta_0\gamma,$$

α_0 et β_0 étant bien déterminés, ce qui ne fournit qu'une seule direction, comme nous l'avons déjà vu.

Nous allons examiner maintenant ce qui arrive quand $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est nul, et nous allons établir les résultats précédents par quelques considérations géométriques.

Plans diamétraux singuliers dans les paraboloïdes.

8. La condition $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \gtrless 0$ est toujours remplie quand la surface est un paraboloïde elliptique; mais $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ peut être nul dans le paraboloïde hyperbolique. La fonction $\varphi(x, y, z)$ est alors le produit de deux facteurs linéaires à coefficients réels, et ces fonctions linéaires égalées à zéro fournissent les équations des deux plans, qui constituent dans ce cas le cône asymptotique de la surface. Les deux plans se coupent suivant une droite parallèle à l'axe.

Faisons, dans la surface, une section dont le plan ne soit pas parallèle à cette droite; par le centre de cette

section, qui est toujours une hyperbole, menons une droite parallèle à la droite d'intersection des plans $\varphi(x, y, z) = 0$; prenons pour origine le point de rencontre de cette droite avec la surface, et pour axe des Z cette parallèle, les axes OX et OY étant dans un plan parallèle au plan de la section. Le cône des directions asymptotiques a alors pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0$$

et l'équation de la surface sera

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2C''z = 0;$$

l'équation du plan diamétral de la direction α, β, γ est

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

ou

$$\alpha(Ax + B''y) + \beta(B''x + A'y) + \gamma C'' = 0.$$

Supposons que nous fassions dans la surface une section par un plan parallèle au plan des xy, $z = z_1$, la section sera une hyperbole dont l'équation, rapportée aux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$, parallèles à Ox et Oy menés par le point ω où l'axe des Z rencontre le plan $z = z_1$, est

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2C''z_1 = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A où la droite OA vient rencontrer le plan $Z = Z_1$; on aura

$$x_1 = \alpha r, \qquad y_1 = \beta r, \qquad z_1 = \gamma r;$$

l'équation du plan diamétral deviendra

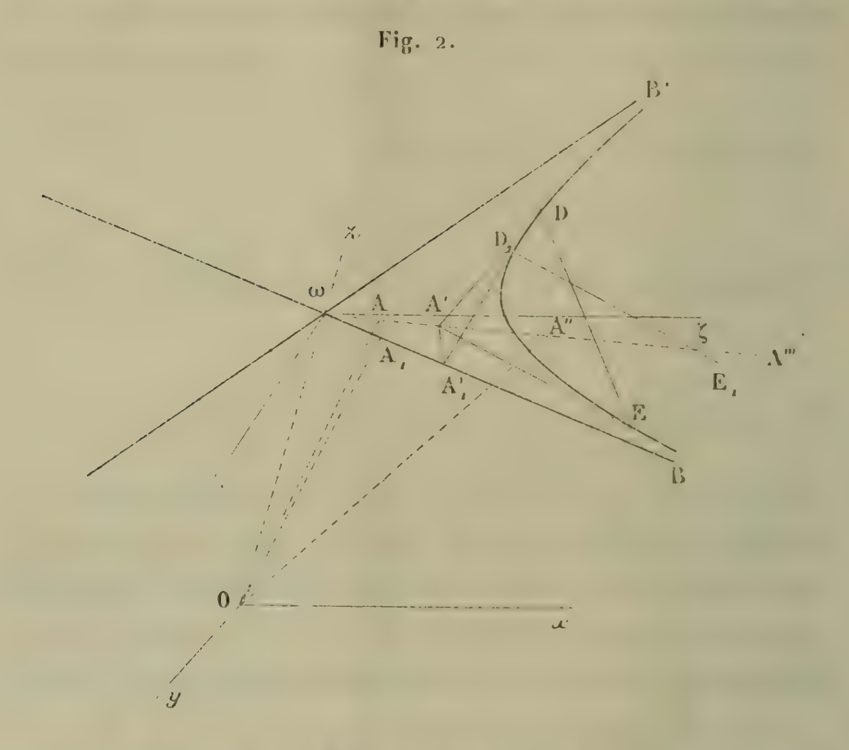
$$x_1(Ax + B''y) + y_1(B''x + A'y) + C''z_1 = 0,$$

en remplaçant α, β, γ par les valeurs x_1, y_1, z_1 qui leur sont proportionnelles.

Cette équation peut être considérée aussi comme l'équation de la section faite dans le plan diamétral par le plan $z = z_1$, cette section étant rapportée aux axes $\omega\xi$, $\omega\eta_1$.

Si maintenant nous considérons un point A′ du plan $\xi\omega\eta_1$, dont les coordonnées par rapport aux axes $\omega\xi$, $\omega\eta_1$

Fig. 2.



sont $2x_1$, $2y_1$, la polaire de ce point A′ par rapport à la section de la surface par le plan $\xi\omega\eta_1$ aura pour équation

$$2x_1(Ax + B''y) + 2y_1(B''x + A'y) + 2C''z_1 = 0;$$

on voit, par suite, que la polaire DE du point A′ coïncide avec la trace du plan diamétral de OA sur le plan $z = z_1$.

Cette remarque permet de faire aisément l'étude des plans diamétraux singuliers du paraboloïde.

En effet, quand le point A se rapproche indéfiniment

de l'une des asymptotes de l'hyperbole, point A' s'en rapproche également, puisqu'il est situé sur ωA, à la distance $\omega A' = 2\,\omega A$; mais alors la polaire de A' tend à devenir parallèle à l'asymptote ωB et, quand OA vient prendre la position OA_1, le point A' vient en A'_1 et la polaire de A'_1 devient la parallèle D_1E_1 à l'asymptote. Le plan diamétral de OA_1 devient alors le plan mené par D_1E_1 parallèlement à $O\omega$ et, par suite, au plan $O\omega B$; les plans $O\omega B$, $O\omega B'$ ne sont autre chose que les plans directeurs de la surface.

On a donc ce théorème :

Si la direction des cordes tend à devenir parallèle à un plan directeur, le plan diamétral conjugué tend à devenir parallèle à ce même plan directeur.

Si la direction des cordes OA_1 se déplace dans le plan directeur $O\omega B$, le plan diamétral correspondant se déplace parallèlement au même plan directeur. A mesure que la direction OA_1 se rapproche de $O\omega$, dans le plan $O\omega B$, le plan diamétral correspondant D_1E_1 s'éloigne de ωB et, lorsque la direction OA_1 coïncide avec $O\omega$, le plan diamétral correspondant est rejeté à l'infini, et cela n'arrive que pour la seule direction $O\omega$.

La figure précédente nous montre aussi que les plans diamétraux conjugués de deux directions OA, OA'' ne peuvent être parallèles que si les polaires des points correspondants A', A''', de coordonnées moitié moindres que celles de A, A'', sont parallèles ; ceci n'ayant lieu que si les points A', A''' décrivent la droite OA conjuguée de DE, on voit que les plans diamétraux conjugués de deux directions ne peuvent être parallèles que si ces directions sont dans un même plan avec l'axe de la surface, et cette condition est évidemment suffisante.

9. Les considérations précédentes nous montrent

quelles circonstances géométriques correspondent au cas où, la surface étant un paraboloïde, deux des trois plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ sont parallèles entre eux, le troisième les rencontrant à distance finie. Supposons que les plans $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ soient parallèles, ces plans sont diamétraux conjugués des directions OY, OZ; par suite, les axes des Y et des Z sont dans un même plan, parallèle à l'axe du paraboloïde : l'axe du paraboloïde est donc parallèle au plan des YZ.

Si deux des trois plans des centres se coupent à distance finie, le troisième plan, $f'_z = 0$ par exemple, étant rejeté à l'infini, l'axe des Z est parallèle à l'axe de la surface.

10. Proposons-nous maintenant de trouver la direction des cordes conjuguées d'un plan

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la direction cherchée : le plan diamétral correspondant a pour équation

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0,$$

d'où

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d};$$

les premiers rapports nous donnent

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + \nu\varphi'_\gamma}{a\lambda + b\mu + c\nu},$$

et, si la relation entre f'_x, f'_y, f'_z dont nous avons démontré l'existence est

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z - \pi = 0,$$

on aura

$$\lambda\varphi'_x + \mu\varphi'_y + \nu\varphi'_z = 0$$

et, par suite,

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Cette condition doit lier les coefficients de l'équation du plan donné pour qu'il soit diamétral d'une direction.

Cette relation exprime que le plan donné est parallèle à l'axe du paraboloïde.

Supposons, comme précédemment, que cette direction soit donnée par les plans

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

Des relations

$$\begin{aligned} A\lambda + B''\mu + B'\nu &= 0,\\ B''\lambda + A'\mu + B\nu &= 0,\\ a\lambda + b\mu + c\nu &= 0 \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire l'identité

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}\varphi'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}\varphi'_y \\ a & b & ax+by+cz \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$ax + by + cz = \lambda'\varphi'_x + \mu'\varphi'_y.$$

Cette identité, où λ' et μ' sont bien déterminés si nous supposons

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \lessgtr 0,$$

montre que le plan $ax + by + cz + d = 0$ est parallèle à la droite d'intersection des deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ qui définissent la direction de l'axe.

Les équations

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d}$$

donnent la direction α, β, γ. Si $2m$ est la valeur commune de ces rapports, on aura

$$\begin{aligned} A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= am, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= bm, \\ C\alpha + C'\beta + C''\gamma &= dm; \end{aligned}$$

le déterminant du système de ces équations est différent de zéro si la surface est un paraboloïde; par suite, on tire de ces équations des valeurs α, β, γ de la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{A}m, \\ \beta &= \mathfrak{B}m, \\ \gamma &= \mathfrak{C}m, \end{aligned}$$

qui déterminent avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ deux valeurs égales et de signes contraires qui définissent une direction unique de cordes.

III. — Cylindres a centres.

11. Les cylindres à centres admettent une ligne de centres.

Ils sont caractérisés par l'existence d'une relation homogène identique entre les dérivées f'_x, f'_y, f'_z,

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

où les coefficients λ, μ, ν ne sont pas tous nuls.

Dans les cylindres à centres autres que le système de deux plans parallèles, on a $\delta = 0$; mais les mineurs du deuxième ordre de δ ne sont pas tous nuls. Nous suppo-

serons dans ce qui suit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro; les plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ déterminent alors la ligne des centres.

Nous allons démontrer d'abord que tous les plans diamétraux passent par une même droite qui est la ligne des centres.

Pour cela, nous établirons la relation

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

en cherchant les valeurs des coefficients λ, μ, ν.

De l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2} f'_x - C \\ B'' & A' & \frac{1}{2} f'_y - C' \\ B' & B & \frac{1}{2} f'_z - C'' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & B'' & f'_x \\ B'' & A' & f'_y \\ B' & B & f'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois déterminants caractéristiques du troisième ordre étant nuls dans le cas des cylindres, on aura

$$\begin{vmatrix} A & B'' & f'_x \\ B'' & A' & f'_y \\ B' & B & f'_z \end{vmatrix} = 0;$$

cette relation est de la forme

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

où ν est différent de zéro.

On en déduit

$$f'_z = -\frac{\lambda}{\nu} f'_x - \frac{\mu}{\nu} f'_y;$$

l'équation du plan diamétral de la direction α, β, γ,

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + f\gamma'_z = 0,$$

devient par la substitution de la valeur de f'_z en fonction de f'_x et f'_y,

$$(\alpha\nu - \lambda\gamma) f'_x + (\beta\nu - \gamma\mu) f'_y = 0,$$

ce qui montre qu'il passe par la droite d'intersection des deux plans

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

12. Pour que deux directions α, β, γ, α', β', γ' donnent le même plan diamétral, il faut et il suffit que les directions considérées soient dans un même plan avec la direction de l'axe.

Soient

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0,$$
$$x\varphi'_{\alpha'} + y\varphi'_{\beta'} + z\varphi'_{\gamma'} + 2(C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma') = 0$$

les deux plans diamétraux ; pour qu'ils soient confondus, il faut que l'on ait

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma'}.$$

L'égalité des deux premiers rapports entraîne celle des deux autres, car de l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 2(Cx + C'y + C''z) \end{vmatrix} = 0$$

par suite,

$$\lambda'\varphi'_x + \mu'\varphi'_y + 2\nu'(Cx + C'y + C''z) = 0;$$

comme on a déjà

$$\lambda\varphi'_x + \mu\varphi'_y + \nu\varphi'_z = 0,$$

ces identités nous montrent que l'égalité

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}}$$

entraîne les autres.

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} = \frac{\varphi'_{\alpha'}}{\varphi'_{\beta'}},$$

et, si m est la valeur commune de ces rapports, elle nous montre que les deux directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont dans le plan

$$\varphi'_x - m\varphi'_y = 0.$$

Inversement, si la direction des cordes satisfait à cette relation, on aura

$$\varphi'_\alpha - m\varphi'_\beta = 0,$$
$$\varphi'_{\alpha'} - m\varphi'_{\beta'} = 0,$$

et l'on en déduit l'égalité des rapports

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma'}$$

et, par suite, les plans diamétraux correspondants sont confondus.

13. Il n'existe qu'une seule direction de cordes pour laquelle le plan diamétral conjugué est indéterminé.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les quatre équa-

tions

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0,\\
C\alpha + C'\beta + C''\gamma &= 0
\end{aligned}$$

soient satisfaites pour un même système de valeurs de α, β, γ.

Les deux premières définissent la direction α, β, γ, les deux autres sont des conséquences des premières : on voit que c'est pour la seule direction de l'axe que le plan diamétral est indéterminé.

Plans diamétraux singuliers dans les cylindres.

14. Si les coefficients directeurs α, β, γ annulent $\varphi(x, y, z)$, l'équation du second degré en ρ s'abaisse au premier degré et l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

est le lieu des points tels que, si par ces points on mène des droites parallèles à la direction α, β, γ, ces droites ne rencontrent plus la surface.

Les plans diamétraux sont appelés, comme précédemment, *les plans asymptotes de la surface*.

La fonction $\varphi(x, y, z)$ ne peut s'annuler pour des valeurs réelles de x, y, z, que dans le cas où la surface est un cylindre hyperbolique.

Nous allons considérer ce dernier cas :

Prenons pour axe des z la droite d'intersection des deux plans $\varphi(x, y, z) = 0$, et pour plan des xy un plan quelconque.

L'équation de la surface sera de la forme

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + D = 0.$$

Le plan diamétral de la direction $\alpha, \mathcal{E}, \gamma$ est alors

$$\alpha f'_x + \mathcal{E} f'_y = 0.$$

Si nous coupons la surface par un plan parallèle au plan des xy,

$$z = z_1.$$

Nous obtenons une hyperbole qui, rapportée à des axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ parallèles à Ox, Oy menés par le point ω où le plan $z = z_1$ rencontre l'axe des z, a pour équation

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B'' x y + D = 0.$$

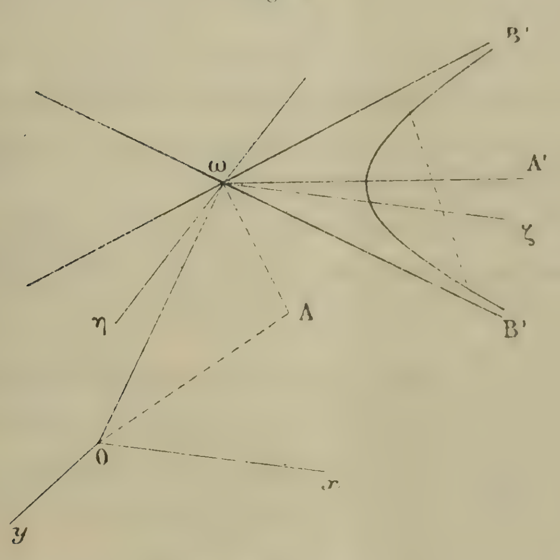
Si nous désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A (*fig.* 3), où la droite OA de direction $\alpha, \mathcal{E}, \gamma$ vient rencontrer le plan $z = z_1$, nous aurons

$$x_1 = \alpha r, \qquad y_1 = \mathcal{E} r, \qquad z_1 = \gamma r;$$

l'équation

$$\alpha f'_x + \mathcal{E} f'_y = 0$$

Fig. 3.



représente alors, dans le plan $\xi\omega\eta$, l'équation du diamètre conjugué de la direction ωA dans la conique du plan $z = z_1$. On voit que, si le point A se rapproche de

l'asymptote ωB, le diamètre conjugué OA′ de cette direction se rapproche de l'asymptote; le plan diamétral de OA étant le plan OωA′ tend à se confondre avec le plan asymptote OωB lorsque la direction OA se rapproche indéfiniment du plan OωB. Lorsque OA se trouve dans le plan OωB, le plan diamétral conjugué correspondant est le plan OωB.

On voit, de plus, que si le point A se déplace sur la droite ωA, le plan diamétral de OA reste le même, et cette condition est nécessaire pour que le plan OωA′ reste conjugué de OA; par suite, pour que deux directions de cordes α, β, γ, α', β', γ' donnent le même plan diamétral, il faut et il suffit que ces directions soient dans un même plan avec l'axe.

15. Ceci nous explique quelles circonstances géométriques se présentent lorsque, la surface étant un cylindre, deux des trois plans des centres sont confondus. Supposons que $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ soient deux plans de centres confondus. Ces plans étant conjugués des directions OY et OZ, les deux directions OY et OZ sont dans un même plan avec celle de l'axe; par suite, l'axe de la surface est parallèle au plan YOZ.

Si les plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ se coupent à distance finie et si l'équation $f'_z = 0$ est une identité, l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente un cylindre dont l'axe est parallèle à l'axe des z, car la direction de l'axe est la seule pour laquelle le plan diamétral correspondant est indéterminé, comme on le voit aisément sur la figure précédente.

16. Proposons-nous maintenant de trouver la direction conjuguée des cordes d'un plan

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Soit α, β, γ la direction cherchée. Le plan diamétral correspondant est

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2C(\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0;$$

il faut que l'on ait

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d}.$$

Supposons encore que les deux plans $f''_x = 0$, $f''_y = 0$ se coupent à distance finie, et

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Nous avons établi les identités

$$\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + \nu\varphi'_\gamma = 0,$$
$$\lambda'\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + 2\nu'(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0;$$

on en conclut les conditions

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,$$
$$a\lambda' + b\mu' + d\nu' = 0,$$

auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation du plan donné pour qu'il puisse être diamétral d'une direction.

Ces conditions expriment que le plan donné passe par l'axe de la surface.

En effet, de l'identité

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0$$

on déduit

$$A\lambda + B''\mu + B'\nu = 0,$$
$$B''\lambda + A'\mu + B\nu = 0,$$

et l'on a de plus

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Ces trois équations nous donnent

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons, pour abréger, par P le premier membre de l'équation du plan donné

$$P = ax + by + cz + d;$$

de l'équation précédente nous déduisons

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x - C \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y - C' \\ a & b & P - d \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y \\ a & b & P \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ a & b & d \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de voir que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ a & b & d \end{vmatrix}$$

est nul.

En effet, de l'identité

$$\lambda'\varphi'_x + \mu'\varphi'_y + 2\nu'(Cx + C'y + C''z) = 0$$

on déduit

$$A\lambda' + B''\mu' + C\nu' = 0,$$
$$B''\lambda' + A'\mu' + C'\nu' = 0;$$

on a de plus

$$a\lambda' + b\mu' + d\nu' = 0,$$

par suite,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ a & b & d \end{vmatrix} = 0;$$

la relation entre f'_x, f'_y et P devient donc

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y \\ a & b & P \end{vmatrix} = 0,$$

et dans cette relation, le coefficient de P étant différent de zéro, P est une fonction linéaire et homogène de f'_x et f'_y; par suite le plan $P = 0$ passe par l'axe du cylindre.

L'équation

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b},$$

qui entraîne toutes les autres, nous donne le plan auquel toutes les cordes conjuguées du plan $P = 0$ sont parallèles.

IV. — Cylindre parabolique.

17. Lorsque l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre parabolique, l'ensemble homogène des termes du second degré est le carré d'une fonction linéaire; les dérivées partielles de la fonction $\varphi(x, y, z)$ sont donc de la forme

$$\varphi'_x = 2l\ \Theta(x, y, z),$$
$$\varphi'_y = 2m\,\Theta(x, y, z),$$
$$\varphi'_z = 2n\ \Theta(x, y, z),$$

$\Theta(x, y, z)$ étant une fonction linéaire de x, y, z.

Le plan diamétral de la direction α, β, γ devient dans ce cas

$$(lx + my + nz)\,\Theta(\alpha, \beta, \gamma) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

On voit que tous les plans diamétraux sont parallèles entre eux.

18. Pour que deux directions de cordes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ donnent le même plan diamétral, il faut et il suffit que ces cordes soient dans un même plan parallèle aux génératrices du cylindre.

Car il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{C\alpha + C'\beta + C''\gamma} = \frac{\Theta(\alpha', \beta', \gamma')}{C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma'},$$

ce qui indique que la direction des cordes est parallèle au plan

$$\Theta(x, y, z) - m(Cx + C'y + C''z) = 0,$$

m étant la valeur de l'un des membres de l'égalité précédente.

Inversement, si la direction des cordes satisfait à la relation

$$\Theta(x, y, z) - m(Cx + C'y + C''z) = 0,$$

les plans diamétraux correspondants sont les mêmes.

Plans diamétraux singuliers.

19. Si la direction des cordes annule $\varphi(x, y, z)$, le plan diamétral correspondant est, comme précédemment, le lieu des droites qui, menées parallèlement à la direction α, β, γ, ne rencontrent plus la surface.

Dans ce cas, le plan diamétral est rejeté à l'infini, car $\varphi(x, y, z)$ est, à une constante près, le carré de

$$\Theta(x, y, z).$$

L'égalité $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ entraîne $\Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, et, par suite, l'équation du plan diamétral se réduit à

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Le plan diamétral sera indéterminé si les coefficients

α, β, γ satisfont aux deux conditions

$$\Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

c'est-à-dire si la direction des cordes est parallèle aux génératrices du cylindre.

On peut aisément suivre la variation de la position du plan diamétral lorsque la direction des cordes varie.

Prenons pour axe des z une génératrice du cylindre, pour origine un point quelconque de cette génératrice, pour axe des x et des y deux droites quelconques passant par ce point. L'équation de la surface est alors

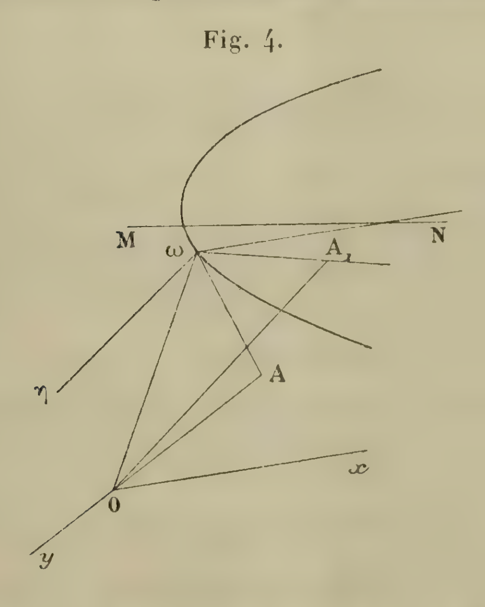
$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0$$

avec

$$AA' - B''^2 = 0.$$

Faisons une section dans la surface par le plan $z = z_1$: cette section est une parabole, et la trace du plan dia-

Fig. 4.



métral de OA (*fig.* 4) sur le plan $z = z_1$ est précisément le diamètre MN de la direction ωA dans la parabole.

Si le point A se déplace sur ωA, c'est-à-dire si OA se déplace dans le plan $O\omega A$, le plan diamétral reste le même ; à mesure que le point A se rapproche de A_1 situé sur la droite ωA_1 parallèle à MN, le diamètre correspondant à la direction ωA s'éloigne à l'infini : par suite le plan diamétral de OA_1 est rejeté à l'infini.

Si le point A s'approche de ω, le plan diamétral correspondant à OA a une position bien déterminée pour chaque direction de OA_1 suivie par le point A, mais le plan diamétral prend une position quelconque si l'on considère des directions quelconques OA ; par suite, le plan diamétral conjugué de $O\omega$ est indéterminé.

20. Étant donné le plan $ax + by + cz + d = 0$, proposons-nous de déterminer le plan des directions des cordes conjuguées de ce plan.

Pour qu'il soit diamétral d'une direction $\alpha\beta\gamma$ de cordes, il faut que

$$\frac{l\,\Theta(\alpha\beta\gamma)}{a} = \frac{m\,\Theta(\alpha\beta\gamma)}{b} = \frac{n\,\Theta(\alpha\beta\gamma)}{c} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{d}.$$

On en tire

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{d\,\Theta(\alpha\beta\gamma)} = \lambda,$$

soit λ la valeur de ce rapport.

On voit que

$$\frac{lx + my + nz}{ax + by + cz} = \lambda;$$

le plan donné doit donc être parallèle au plan

$$lx + my + nz = 0$$

ou

$$\Theta(x, y, z) = 0 ;$$

cette condition suffit pour qu'il soit diamétral d'une in-

finité de directions situées dans un plan, car l'équation

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = \lambda\, d\Theta(\alpha, \beta, \gamma)$$

nous montre que, si la direction des cordes est dans le plan

$$Cx + C'y + C''z = \lambda\, d\Theta(x, y, z),$$

les trois équations d'identification sont satisfaites, et toutes les droites tracées dans ce plan ont pour plan diamétral le plan donné.

Enfin, si le cylindre parabolique se réduit à un système de deux plans parallèles, toutes les directions de cordes donnent le même plan diamétral : nous ne nous y arrêterons pas.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888.

Physique.

1. Microscope composé. On demande *seulement* la marche des rayons lumineux et la mesure du grossissement.

2. Détermination, par la méthode de Dumas, de la densité de la vapeur d'un liquide bouillant au-dessous de 100°.

Chimie.

Exposer les analogies qui conduisent à placer l'azote, le phosphore et l'arsenic dans une même famille naturelle.

Composition française.

Les Sociétés modernes sont en progrès évident sur celles qui les ont précédées au point de vue de l'accroissement des connaissances dans toutes les branches de la Science : elles tendent manifestement à un adoucissement général des mœurs, à un développement plus libre et plus heureux de l'humanité.

L'idée de Patrie doit-elle être entamée par cette évolution ? Ne doit-elle pas, au contraire, se fortifier de plus en plus ? La nature, l'histoire, les aspirations les plus nobles de l'être humain ne se trouvent-elles pas d'accord pour commander d'entretenir l'énergie morale que donne le patriotisme ?

Lavis.

Faire à l'encre de Chine à teintes plates le lavis d'un cône de révolution reposant sur un socle cylindrique et se détachant sur un fond gris dégradé à teintes fondues.

Nota. — Les traits pour le cadre, les arêtes ou les contours apparents des solides seront faits à l'encre.

On observera les filets de lumière.

Calcul trigonométrique.

On donne dans un triangle les trois côtés :

$$a = 12524^{\text{m}},62,$$
$$b = 22639^{\text{m}},27,$$
$$c = 18913^{\text{m}},45.$$

Déterminer les trois angles et la surface.

Épure de Géométrie descriptive.

Représenter par ses projections le solide qui reste quand, d'une portion de cône supposée remplie, on enlève ce qui se trouve à l'intérieur d'un cylindre donné.

Le cône est de révolution et a son axe vertical ; l'angle au sommet est droit. La portion remplie va du sommet à un plan horizontal mené à $0^{\text{m}},12$ plus bas.

Le cylindre est aussi de révolution. L'une de ses génératrices coïncide avec celle des génératrices de front du cône, qui est située à droite sur la nappe inférieure. Son axe est en avant de celui du cône ; la perpendiculaire commune à ces deux droites rencontre la seconde à $0^{\text{m}},09$ au-dessous du sommet : elle a $0^{\text{m}},03$ de longueur.

On placera la projection horizontale du sommet du cône à $0^{\text{m}},07$ plus bas, et la projection verticale à $0^{\text{m}},19$ plus haut que

le centre du cadre, sur la parallèle aux grands côtés menée par ce point.

En fait de constructions autres que celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister dans le tracé à l'encre que la détermination d'un point quelconque de chaque courbe, et celle de la tangente au même point.

AUTRE SUJET (1).

Un cube plein effectue une rotation entière autour d'une de ses diagonales : représenter, par ses projections, le solide ainsi engendré.

Chaque diagonale du cube a 24^{cm} de longueur ; celle autour de laquelle il tourne est de front et fait, avec le plan horizontal, un angle égal à la sixième partie de l'angle droit ; des deux extrémités de cette diagonale, celle de droite est la plus élevée.

On placera les projections du centre du cube à 25^{cm} de distance l'une de l'autre, de manière que la droite qui les joindrait ait pour milieu le centre du cadre et soit parallèle aux grands côtés.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister dans le tracé à l'encre que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

On n'indiquera aucune asymptote.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1888.

Philosophie.

PREMIER SUJET.

1. On donne un angle ROS et un point A sur l'un des côtés. Par A on mène un cercle qui est tangent au côté OR et coupe

(1) Fait par quelques élèves qui n'ont pu composer en même temps que les autres.

OS aux points B, C. On mène en B et C les tangentes CD et BD. Puis on joint AB, AC :

1° Trouver les lieux du centre du cercle inscrit et des centres des cercles exinscrits au triangle ABC;

2° Trouver les lieux du centre du cercle inscrit et des centres des cercles exinscrits au triangle BCD ([1]).

2. Deux cercles de centres A et B se coupent suivant la droite CC′ qui rencontre AB au point O.

Les droites AC et CB sont rectangulaires. On donne

$$AO = a, \qquad OB = b, \qquad (a \gtreqless b).$$

Trouver sur AB un point D tel que, si l'on élève par ce point une perpendiculaire à AB, qui rencontre les deux cercles, la somme des carrés des cordes déterminées par la perpendiculaire soit égale à un carré donné K^2. Discuter.

DEUXIÈME SUJET.

1. On donne dans un plan deux points fixes A et A′; on mène, dans ce plan, un cercle C de rayon quelconque tangent à la droite AA′ au point A et un cercle C′ tangent à la même droite au point A′ et tangent au cercle C′. On mène la tangente commune extérieure, autre que AA′, aux deux cercles C, C′; soient B, B′ les deux points de contact. Sur BB′ comme diamètre, dans le plan de la figure, on décrit un cercle C″:

1° Démontrer que tous les cercles tels que le cercle C″, qu'on obtient en faisant varier le rayon du cercle C, sont tangents à un même cercle fixe ;

2° Trouver le lieu du centre de chacun des cercles, tels que le cercle C″, obtenus en faisant varier le rayon du cercle C.

2. Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle ABC, calculer les rayons de trois sphères tangentes entre elles deux à deux et tangentes au plan du triangle ABC, la première en A, la seconde en B, la troisième en C. Cela fait, considérant

---

[1] Le concours a été annulé, parce que le lieu des centres des cercles exinscrits au triangle BCD est une courbe du quatrième ordre, et que la Géométrie élémentaire est seule enseignée en *Philosophie*.

les deux côtés a et b comme seuls connus, déterminer le troisième côté c de façon que la somme des rayons des trois sphères soit égale à une longueur donnée l. Discuter ce dernier problème, seulement dans le cas particulier où $b = a$; et reconnaître alors, suivant la grandeur de l, dans cas quel l'angle ACB est moindre que 60°, compris entre 60° et 90°, plus grand que 90°.

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1888).

Mathématiques.

1. a et b désignant les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, h la hauteur perpendiculaire sur l'hypoténuse, prouver la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

En conclure le moyen de construire géométriquement la longueur h donnée par la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \ldots + \frac{1}{l^2},$$

où a, b, ..., l sont des longueurs données, en nombre quelconque.

2. Un voyageur doit se rendre du point A au point C par la voie ferrée AX et par une voie partant d'un point indéterminé B de AX et se dirigeant vers le point C. On demande de déterminer le point B de façon que sa dépense soit minima, sachant que, payant place entière sur la voie BC, le voyageur paye seulement $\frac{1}{n}$ du tarif sur la voie AX.

On interprétera toutes les solutions, et l'on examinera spécialement les cas de $n = \infty$ et de $n = 1$.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1. Trouver la différence de hauteur de deux points inaccessibles.

2. On donne, dans un triangle, les trois hauteurs

$$h = 12566^{m},368, \qquad h' = 9424^{m},776, \qquad h'' = 7539^{m},8208\ ;$$

on demande les côtés et les angles.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL (CONCOURS DE 1887).

Algèbre et Trigonométrie.

On considère un quadrilatère convexe ABCD, le centre de gravité G de sa surface, et le point de rencontre O de ses diagonales. Soient α, β, γ, δ les aires respectives des triangles GAB, GBC, GCD, GDA et α', β', γ', δ' celles des triangles OAB, OBC, OCD, ODA :

1° Démontrer que la surface S du quadrilatère est exprimée par le binôme $3\alpha + \gamma$, ou par les binômes analogues ;

2° Trouver la relation entre les quatre surfaces α', β', γ', δ', puis la relation entre les surfaces α, β, γ, δ ;

3° Résoudre le quadrilatère, sachant que les distances du centre de gravité G aux côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement (en mètres)

$$a' = \frac{8}{3}r, \qquad b' = \frac{7}{18}r, \qquad c' = \frac{10}{3}r, \qquad d' = \frac{7}{15}r,$$

et sachant, en outre, que l'on a (en mètres carrés)

$$\alpha + \beta = 5r, \qquad \beta + \gamma = 4r, \qquad \gamma + \delta = 4r, \qquad \delta - \alpha = 5r,$$

où r désigne la racine positive de l'équation

$$44x^2 + 16x - 1 = 0.$$

Mécanique.

Un fil de fer vertical AB, de 10^{m} de longueur, et dont la section normale mesure 50^{mmq}, est fixé par son extrémité supérieure A, et se termine par un crochet à son extrémité inférieure B. Ce fil s'allonge de 1^{cm} quand on exerce sur lui, sans choc, une traction de 20^{kg} par millimètre carré de sa section, et, pour des tractions moindres, l'allongement est proportionnel à la traction. Cela posé, le fil de fer étant au repos, on accroche en B, sans choc, une charge donnée de P kilogrammes, assez faible pour que les allongements ne dépassent pas 1^{cm}, et l'on demande :

1° Quel sera le plus grand allongement absolu qu'éprouvera le fil, ou de combien s'abaissera le crochet B ?

2° Au bout de combien de temps se produira cet allongement maximum ?

3° Si cet allongement persistera, et quelles seront les principales circonstances du mouvement ?

4° Quelle est la plus grande valeur que puisse avoir le poids P sans que la limite de 1^{cm}, pour les allongements, soit dépassée ?

On négligera la masse et le poids du fil en comparaison de la masse et du poids du fardeau.

Géométrie descriptive.

Une sphère opaque est posée sur le plan horizontal, et un angle droit est donné dans ce plan. Construire un point tel que, si l'on y place une lumière, l'ombre que portera la sphère sur le plan horizontal soit limitée par une parabole tangente aux deux côtés de l'angle droit donné. Déterminer cette ombre portée, ainsi que l'ombre propre de la sphère.

Épreuve pratique de calcul.

On donne la base $BC = a$ d'un triangle et les angles adjacents B et C. Inscrire au triangle ainsi défini un triangle équilatéral dont un côté NT soit parallèle à la base BC du triangle.

On cherchera l'expression du rapport $k = \frac{MB}{MC}$, ainsi que les segments MB, MC et le côté NP du triangle équilatéral.

Application : $BC = 1294^m,67$; $B = 50°3'57''$; $C = 39°56'3''$.

Épreuve pratique de Géométrie descriptive.

Une demi-sphère creuse ACB, éclairée par le point lumineux P, repose, par son sommet C, sur le plan horizontal. Déterminer l'ombre propre, ainsi que l'ombre portée sur le plan horizontal.

Données numériques. — Le centre O de la sphère est à 5^{cm} au-dessus du plan horizontal et à 85^{mm} en avant du plan vertical. Le point P est situé dans le plan de front qui contient ce centre, à 125^{mm} au-dessus du plan horizontal et à la même distance de 125^{mm} à droite de la verticale du centre.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (TOULOUSE 1888).

1. Décomposer en deux facteurs réels du second degré le polynôme

$$x^4 - 4x^3 \cos a \cos b + 2x^2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - 4x \cos a \cos b + 1.$$

2. On donne une ellipse rapportée à son axe et sur cette ellipse un point $M(x', y')$; former l'équation générale des coniques osculatrices à l'ellipse au point M.

Exprimer que cette équation représente une parabole ; démontrer ensuite que, par un point $P(\alpha, \beta)$ du plan, il passe quatre de ces paraboles, que les quatre points (x', y') correspondants sont situés sur deux droites parallèles, et que, parmi eux, deux au plus sont réels.

Former l'équation d'une parabole passant par les quatre points (x', y') qui correspondent à un point (α, β), et trouver le lieu décrit par ce dernier point lorsque la parabole en question passe par un point fixe du plan.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1888).

Arithmétique.

Calculer à moins de 0,01 près en centièmes la valeur de l'expression

$$\sqrt{\frac{\pi \times 9,8765432I}{17}}.$$

Algèbre.

Étant donnés un triangle ABC, rectangle en A et isoscèle, et un point D situé sur le côté AB, par un point X situé sur le côté AC on mène XE parallèle à AB et l'on joint ED. Désignant par b le côté $AB = AC$, par x la distance $CX = XE$ et par d la distance AD, on demande :

1° L'expression du volume engendré par le trapèze AXED tournant autour de AC ;

2° L'interprétation géométrique dont cette expression est susceptible lorsque l'on donne à x des valeurs négatives ;

3° L'étude des variations du volume représenté par cette expression quand le point X se meut sur AC et sur son prolongement au delà du point C ;

4° L'étude du même problème en supposant le point D situé à droite de B;

5° L'étude du même problème en supposant le point D situé à gauche de A.

Géométrie descriptive.

Une droite est définie par les deux points (a, a') (b, b') (1).

$$\alpha a = 42^{\text{mm}},$$
$$\beta b = 24^{\text{mm}},$$
$$\alpha a' = 12^{\text{mm}},$$
$$\beta b' = 58^{\text{mm}},$$
$$\alpha\beta = 80^{\text{mm}}.$$

---

(1) α et β sont les points d'intersection avec la ligne de terre des lignes de rappel aa', bb'.

On demande :

1° De déterminer les projections de la perpendiculaire commune à cette droite et à la ligne de terre ;

2° De tracer les projections de la sphère décrite sur cette perpendiculaire comme diamètre ;

Intersection avec les plans de projection ;

3° De tracer les projections du cube circonscrit à cette sphère dont l'une des faces passe par la droite donnée et dont l'une des arêtes est parallèle à cette droite.

Calcul trigonométrique.

Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 360° qui satisfont à l'équation

$$\sin^3(2x + 13^\circ) = \frac{0{,}0643217 \times \cos 212^\circ 10' 22''}{(\text{tang}\, 321^\circ 21' 19'')^4}.$$

Géométrie.

D'un point pris sur la surface d'une sphère, on peut toujours abaisser un arc de grand cercle perpendiculaire à un petit cercle donné.

Définitions et théorèmes à l'appui.

Propriétés des arcs de grand cercle perpendiculaires et obliques à un arc de petit cercle.

Géométrie analytique.

Les axes étant supposés rectangulaires, on considère la conique définie par l'équation

$$[(x - a)^2 + y^2 - \rho^3](1 + m^2) - (y - mx)^2 = 0,$$

dans laquelle a et ρ sont des constantes et m un paramètre variable.

On demande de montrer :

1° Que cette conique a un double contact avec la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - \rho^2 = 0$$

au point où elle est coupée par la droite

$$y - mx = 0;$$

2° Que cette conique est une parabole quel que soit le paramètre m.

Trouver l'équation de l'axe de cette parabole.

Cet axe passe par un point fixe quand m varie.

Lieu géométriqne des points de contact des tangentes menées par l'origine à toutes ces paraboles.

3° Aux points où chacune de ces paraboles coupe l'axe des x, on mène des normales.

Lieu géométrique du point de rencontre de ces normales.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1888).

Mathématiques.

1. AB et A'B' sont deux droites parallèles et AA' est une perpendiculaire commune à ces deux droites qui les rencontre en A et A'. Sur ces deux droites on prend, d'un même côté de AA', deux longueurs $AO = x$ et $A'O' = y$, qui sont variables, mais liées entre elles par la relation $xy = \frac{a^2}{4}$, a désignant la distance AA'. De O et de O' comme centres, avec les rayons x et y, on décrit deux circonférences :

1° Démontrer que ces deux circonférences sont tangentes ;

2° Trouver le lieu de leur point de contact ;

3° M désignant ce point de contact, on mène la droite AM, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre C' avec A'B'; on mène de même A'M que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre C avec AB, on joint CC'.

Déterminer x et y de manière que le trapèze AA'C'C ait une surface donnée.

2. On donne un cône circulaire droit et un point A sur le plan de sa base. On mène par ce point A une droite rencontrant la circonférence de base aux points B et C. Quelle doit être la distance de cette droite au centre de la base, pour que le triangle SBC ait une surface donnée (S étant le sommet du cône)?

3. Dans un triangle l'angle A est de $72°27'45'',7$ et le rapport des côtés qui le comprennent est égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}$; calculer les angles B et C.

Géométrie descriptive.

Un tétraèdre SABC, dont la face ABC est située sur le plan horizontal, est déterminé de la manière suivante : le sommet S a pour cote 70^{mm}, et pour éloignement 30^{mm}. L'arête SA est dans un plan de profil et le point A a pour éloignement 115^{mm}. La face SBC (B à gauche) est parallèle au plan vertical. Les faces SAB et SAC font chacune avec le plan de profil qui contient l'arête SA un angle de 45°. — Sur l'arête SB on prend, entre S et B, un point D à 20^{mm} du sommet S, et par ce point D on mène un plan perpendiculaire à l'arête SB; ce plan coupe SC en E et SA en F :

1° Construire les projections du triangle DEF;

2° On considère la sphère qui a DE pour diamètre : représenter le solide commun à cette sphère et au tétraèdre.

Lavis.

Laver, soit à teintes plates superposées, soit à teintes fondues, la projection verticale d'une borne en pierre formée d'un prisme octogonal régulier surmonté d'un cylindre.

Les rayons lumineux sont parallèles à une droite dont les deux projections font des angles de 45° avec la partie gauche de la ligne de terre.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1888.

Mathématiques.

1. Voir l'énoncé, 3e série, t. VII, p. 314.

2. Construire la courbe représentée par l'équation

$$x(x^2 - y^2)^2 + 4xy(x - y)^2 - 4y(2y - 3x) = 0.$$

Physique.

1. Quelle quantité de chaleur au maximum pourra céder 1^{mc} d'air chauffé sous la pression atmosphérique à telle température aussi élevée que l'on voudra ?

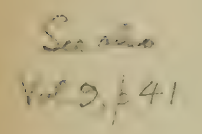
2. Une lunette astronomique est munie d'un réticule formé de deux fils parallèles. En face de cette lunette est disposée une mire divisée en centimètres. Pour que le nombre de centimètres que l'on voit entre les deux fils du réticule soit proportionnel à la distance de la mire au pied vertical qui supporte la lunette, on a intercalé dans celle-ci une troisième lentille. Étudier l'instrument ainsi modifié.

ERRATA AUX TABLES DES QUARTS DE CARRÉS DE J. BLATER (1).

Transmis par M. Adolf Weixler, employé du Bureau de triangulation au Palais Royal Impérial de l'Établissement géographique militaire à Vienne (Autriche).

Pages.	Subdivision.	Arguments. Ligne de N.	Colonne B.	Au lieu de :	Lisez :
28...	I	62	134	150	158
184...	I	94	918	354	356
184...	I	96	918	272	274

(1) Blater (Joseph). — *Table des quarts de carrés de tous les nombres entiers de* 1 *à* 200000, servant à simplifier la multiplication, l'élévation au carré, ainsi que l'extraction de la racine carrée, et à rendre plus certains les résultats de ces opérations, publiées avec la collaboration de A. Steinhauser, Conseiller impérial à Vienne. Grand in-4°; 1888. Prix : Broché, 15^{fr}; cartonné avec signets de parchemin, 20^{fr}.



SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

On donne un cercle ayant pour centre le point O *et une parabole* P, *on considère les coniques* C *inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle et à la parabole. Cela posé, on demande :*

1° *De trouver l'enveloppe des polaires* A *du centre* O *par rapport aux coniques* C ;

2° *L'enveloppe des tangentes* δ *aux coniques* C *telles que la normale au point de contact passe par* O ; *l'enveloppe des axes des coniques* C. *Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur* A, *sur les tangentes* δ *et sur les axes de* C.

1° Nous nous appuierons sur cette propriété bien connue (CHASLES, *Traité des Sections coniques*) :

Le lieu des centres (c) *des coniques circonscrites à un quadrilatère donné est une hyperbole équilatère.*

Cette hyperbole équilatère, dite hyperbole des neuf points, passe, comme on le sait, par les sommets du triangle formé par les diagonales du quadrilatère, par les milieux des côtés et des diagonales intérieures. Elle a pour centre le centre de gravité du quadrilatère.

Si l'on suppose que le quadrilatère *abcd* auquel sont

circonscrites les coniques (c) est déterminé par l'intersection d'un cercle (O) et d'une conique (p), l'hyperbole équilatère (h) des neuf points relative aux coniques (C) aura ses asymptotes parallèles aux bissectrices de deux côtés du quadrilatère, puisque ce sont les directions des axes des deux paraboles circonscrites à *abcd*.

Les axes des coniques (c) sont, d'ailleurs, parallèles à ces mêmes droites (théorème de Joachimstahl).

Cette hyperbole équilatère (h) passera par le centre du cercle (O) qui fait partie de la famille des coniques (c) circonscrites à *abcd*. Supposons en outre que la conique (p) passe par le centre de (O).

Si nous transformons la figure précédente par polaires réciproques par rapport au cercle (O), nous obtenons la réponse à la première question :

L'enveloppe de la polaire A *du centre d'un cercle* (O) *par rapport aux coniques* (C) *inscrites dans le quadrilatère circonscrit au cercle* (O) *et à une parabole donnée* (P) *est une parabole* (H) *inscrite dans le triangle autopolaire commun aux coniques* (C) *et admettant pour directrice la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère circonscrit à* (O) *et à* (P).

Cette parabole (H) est la transformée de (h) par rapport à (O). De sorte qu'au lieu des pôles a de la droite de l'infini par rapport aux coniques (c) correspond l'enveloppe de la polaire A du centre de (O) par rapport aux coniques (C).

Cette transformée est une parabole parce que (h) passe par le centre du cercle (O). De plus, comme l'hyperbole équilatère (h) passait par les milieux des côtés

et des diagonales intérieures du quadrilatère *abcd*, les six droites menées par les six sommets du quadrilatère ABCDEF [circonscrit à (O), les points de contact étant *a*, *b*, *c*, *d*] parallèlement à leurs polaires respectives seront six tangentes à cette parabole (H).

On peut voir *a priori* que les quatre droites AC, BD, EF et la droite de l'infini sont des tangentes à l'enveloppe cherchée. Les trois droites AC, BD, EF peuvent, en effet, être considérées comme représentant trois coniques inscrites dans le quadrilatère ABCDEF. Les polaires de *o* par rapport à ces coniques réduites à des droites doubles sont précisément ces droites. Quant à la droite de l'infini, c'est la polaire de *o* par rapport au cercle (O) qui appartient aux coniques (C) inscrites dans le quadrilatère ABCDEF.

L'hyperbole (*h*) passant par les sommets du triangle MNP formé par les diagonales de *abcd*, la parabole (H) sera inscrite dans ce triangle. Sa direction passera, par suite, par le centre *o* de (O) puisque MNP est autopolaire par rapport à ce cercle. Je dis maintenant que cette directrice est précisément la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère ABCDEF qui contient *o* et qui est appelée *droite de Newton*.

Nous nous appuierons pour cela sur ces deux propriétés :

Lemme I. — *L'hyperbole* (*h*) *lieu des centres des coniques* (*c*) *passant par l'intersection d'un cercle* (O) *et d'une conique* (*p*) *qui passe par son centre* O *a pour tangente en ce point o la normale à* (*p*).

Lemme II. — *Quand on transforme par polaires réciproques une parabole, le centre du cercle* (O) *par rapport auquel on transforme étant sur la directrice, on*

obtient une hyperbole équilatère tangente à la directrice au centre du cercle (O) *et réciproquement* (¹).

Cela posé, quand nous transformons la conique (p), la direction des diamètres de la parabole (P) transformée de (p) par rapport à (O) est la droite Δ de Newton relative au quadrilatère ABCD.

Cette droite n'est autre que la normale à (p) en o, qui est la tangente à (h) en ce point (lemme I) et, d'après le lemme II, ce sera la directrice de (H).

Comme les parallèles menées par ABCD à leurs polaires par rapport à (O) sont quatre tangentes à (H), il résulte de là que le quadrilatère inscriptible $\alpha\beta\gamma\delta$ ainsi formé est tel que la droite Δ' qui joint les milieux de ses diagonales est perpendiculaire à la droite Δ de Newton du quadrilatère ABCD, d'où ce théorème :

Théorème I. — *Si, par les quatre sommets d'un qua-*

(¹) Considérons une hyperbole équilatère (h) de centre G (α, β),

$$(h) \qquad xy - \beta y - \alpha x = 0,$$

$$(o) \qquad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0.$$

La transformée par polaires réciproques sera, par rapport au cercle (O),

$$(\mathrm{H}) \qquad (\alpha y - \beta x - \rho^2)^2 - 4\beta^2 \rho x = 0,$$

qui est une parabole (H) admettant pour direction des diamètres la droite $\alpha y - \beta x = 0$ perpendiculaire à la droite $\beta y + \alpha x = 0$ qui est la tangente en o à (h). Cette parabole est de plus tangente aux deux parallèles, aux asymptotes de (h) menées par le centre o de (O).

Sa directrice est la droite $\beta y + \alpha x = 0$ perpendiculaire à la direction des diamètres et passant par l'origine qui est le sommet d'un angle droit circonscrit à (H). On voit que cette directrice n'est autre que la tangente à (h) en ce point o.

Cette droite $\beta y + \alpha x = 0$ est parallèle à la polaire du centre G (α, β) de (h) par rapport à (O) qui a pour équation

$$\beta y + \alpha x - \rho^2 = 0.$$

drilatère circonscrit à un cercle, on mène des parallèles à leurs polaires par rapport au cercle, ces quatre dernières droites forment un second quadrilatère qui est tel que la droite qui joint les milieux de ses diagonales est perpendiculaire à la droite analogue dans le premier.

La droite Δ' donne en effet la direction des diamètres de H.

Cette seconde partie se déduira immédiatement de la propriété suivante, que nous allons établir :

Lemme III. — *L'hyperbole aux pieds des normales menées du centre d'un cercle à l'une des coniques qui sont circonscrites à un quadrilatère inscrit dans ce cercle est la même pour toutes les coniques et coïncide avec l'hyperbole des neuf points relative à ce quadrilatère.*

En effet, considérons l'une des coniques (c_1) ; l'hyperbole (h_1) aux pieds des normales menées de o à (c_1) n'est autre que l'hyperbole (h). Les axes de (c_1) sont, comme on le sait, parallèles aux bissectrices de deux des côtés du quadrilatère *abcd* ; c'est-à-dire que les asymptotes de (h) et (h_1) sont parallèles. De plus, (h) et (h_1) ont encore en commun le centre o du cercle (O) et le centre de la conique (c_1) considérée ; pour qu'elles coïncident, il suffit de montrer qu'elles ont un cinquième point commun. Or, si nous montrons que ceci a lieu pour l'une des coniques (c), il est évident, par raison de continuité, que ce sera vrai pour l'une quelconque des coniques (C).

Prenons, à cet effet, les coniques particulières (ac, bd), (ab, dc) et (ad, bc) ; les pieds des normales menées de o sur (ac, bd) sont les milieux des segments ac et bd. Or ces points appartiennent à h.

Pour cette conique (c) particulière les deux hyperboles coïncident ; il en est de même pour les coniques (ab, dc) ; la propriété est par suite démontrée.

Si l'on transforme par rapport au cercle (O), nous en déduisons :

L'enveloppe des tangentes δ aux coniques (C) *inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle* (O) *et à une parabole* (P) *aux points où la normale passe par le centre* o *de* (O) *est la parabole* (H) *tangente aux côtés du triangle autopolaire commun aux coniques* (C) *et admettant pour directrice la droite de Newton* Δ *relative à ce quadrilatère.*

Remarquons que cette parabole (H) a son axe perpendiculaire à celui de (P) ; par suite, *les paraboles* (P) *et* (H) *se coupent en quatre points formant un quadrilatère inscriptible dans un cercle.*

Nous rappelons, pour trouver l'enveloppe des axes, cette propriété bien connue :

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite joignant les milieux des diagonales; cette droite est dite droite de Newton relative à ce quadrilatère.

Je dis que l'enveloppe des axes des coniques (C) est la parabole (H) déjà trouvée.

Considérons, en effet, un point ω sur la droite de Newton relative au quadrilatère ABCD ; il existe une et *une seule* conique (C) tangente à trois côtés du quadrilatère et admettant ce point ω pour centre. Elle sera évidemment tangente au quatrième côté. Puisqu'il n'existe qu'*une seule* conique (C) admettant ce point ω pour centre, il n'y a que deux droites rectangulaires qui passent par ce point et qui soient tangentes à l'enve-

loppe cherchée. Cette enveloppe de seconde classe sera conséquemment une conique. Cette conique étant telle que le lieu des sommets des angles droits qui lui sont circonscrits est une droite Δ, c'est une parabole admettant Δ pour directrice.

Si l'on considère les coniques particulières AC, BD, EF, on voit que ces droites et les perpendiculaires en leurs milieux sont six droites tangentes à cette parabole qui est précisément la parabole H comme ayant en commun avec elle trois tangentes et la directrice.

Nous déduisons de ce qui précède les propriétés remarquables, peut-être nouvelles, du quadrilatère circonscrit à un cercle.

Théorème II. — *Les perpendiculaires aux diagonales d'un quadrilatère circonscrit à un cercle en leurs milieux forment un triangle dont le point de concours des hauteurs est sur la droite de Newton de ce quadrilatère.*

Théorème II *bis*. — *Étant donné un quadrilatère quelconque, il existe toujours une parabole* (H) *tangente aux trois diagonales et admettant pour directrice la droite de Newton de ce quadrilatère.*

Théorème III. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD *circonscrit à un cercle* (O), *si l'on circonscrit le cercle* (Γ_1) *au quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *obtenu en menant des points* A, B, C, D *des parallèles à leurs polaires par rapport à* (O), *et les cercles* (Γ_2), (Γ_3) *circonscrits aux triangles formés, l'un par les trois diagonales de* ABCD, *l'autre par les perpendiculaires élevées aux milieux de ces diagonales, on obtient trois cercles* (Γ_1), (Γ_2) *et* (Γ_3) *se coupant en un même point. Les projections orthogonales de ce point sur les côtés des*

deux triangles et sur les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ sont dix points situés sur une droite perpendiculaire à la droite de Newton relative au quadrilatère ABCD.

Théorème IV. — *Étant donné un quadrilatère circonscrit à un cercle, si l'on trace les symétriques des trois diagonales par rapport à la droite de Newton relative à ce quadrilatère, on obtient trois droites concourantes sur le cercle circonscrit au triangle formé par les trois diagonales.*

Théorème V. — *La perpendiculaire menée du centre* o *d'un cercle* (O) *à la droite de Newton relative à un quadrilatère circonscrit à ce cercle passe par le centre* G *de gravité du quadrilatère inscrit dans ce cercle et qui a pour sommets les points de contact du premier.*

Ce dernier théorème résulte de ce que la polaire (¹) du centre de gravité G du quadrilatère inscrit par rapport au cercle est parallèle à la droite de Newton du quadrilatère circonscrit, de sorte que GO est perpendiculaire à la droite de Newton.

Remarquons que la première et la troisième question sont susceptibles de *généralisation.*

1° *L'enveloppe de la polaire* A *d'un point de la droite de Newton d'un quadrilatère quelconque par rapport aux coniques* (C) *inscrites dans ce quadrilatère est une parabole* (H_1) *inscrite de ce triangle autopolaire commun aux coniques* (C).

2° *L'enveloppe des axes des coniques* (C) *inscrites dans un quadrilatère quelconque est la parabole* (H)

(¹) La polaire de G est donc bien parallèle à la directrice, c'est-à-dire à la droite de Newton.

inscrite dans le triangle autopolaire commun aux coniques (C), *sa directrice étant la droite* A *de Newton de ce quadrilatère.*

Il n'y a rien à modifier, pour la démonstration, aux méthodes données. Les paraboles (H) et (H_1) ne coïncident que si le quadrilatère est circonscrit à un cercle. Il résulte de cette généralisation que les théorèmes II et IV sont encore vrais pour un quadrilatère quelconque.

La seconde question ne peut se généraliser, car le lieu dans le cas d'un quadrilatère quelconque est une quartique qui, lorsque le quadrilatère est circonscrit à un cercle, se décompose en deux coniques : le cercle et la parabole (H).

Cherchons maintenant la polaire de O par rapport à cette parabole remarquable; nous résolvons ainsi la dernière partie de la question.

Cette polaire sera *une cubique circulaire unicursale* à point double réel, puisque le point o se trouve sur la directrice de (H). Les tangentes au point double seront rectangulaires; pour les construire, il suffira de mener par o des parallèles aux asymptotes de (h) ; ces droites sont en effet les tangentes à (H) qui passent par o.

Ces asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux des côtés du quadrilatère *abcd* : on a donc les tangentes au point double.

Nous voyons immédiatement, d'après ce que nous avons dit sur la parabole (H), que cette cubique passera par les six sommets du quadrilatère ABCDEF et aussi par les pieds m, n, p des hauteurs du triangle MNP formé par les trois diagonales du quadrilatère [ce sont en effet les pieds des perpendiculaires abaissées de o sur ce triangle MNP autopolaire par rapport à (O)].

Cette cubique (Γ) passe aussi par les pieds ω_1, ω_2, ω_3 des perpendiculaires abaissées de o sur le triangle formé par les perpendiculaires élevées aux milieux des diagonales de ABCD. Ainsi cette cubique circulaire passe par les douze points A, B, C, D, E, F, m, n, p, ω_1, ω_2, ω_3.

Elle admet de plus comme asymptote la parallèle à la droite de Newton Δ de ABCD menée par le symétrique du foyer de H par rapport à Δ. Ceci résulte de la propriété suivante :

Les podaires des différents points de la directrice d'une parabole sont des cubiques circulaires (Γ) *admettant toutes même asymptote, qui est la parallèle à la directrice menée par le symétrique du foyer de la parabole par rapport à la directrice* [1].

Cette cubique (Γ) est suffisamment déterminée.

Cette cubique (Γ) n'est autre que la cubique (Γ'_1) que l'on trouve comme lieu des foyers des coniques (C) inscrites dans le quadrilatère ABCD. En effet, ces cubiques ont d'abord à l'infini trois points communs : les deux points circulaires I et J, et le point rejeté à l'infini dans la direction de la droite Δ de Newton de ABCD. Car on sait que la cubique (Γ'_1) circulaire passe par les six sommets du quadrilatère ABCDEF et a pour asymptote la droite parallèle à Δ menée par la symétrique du foyer de la parabole (P) par rapport à Δ. Outre ces trois

---

[1] Soit l'équation de (H)

$$(\text{H}) \qquad y^2 - 2px + p^2 = 0,$$

la podaire du point (o, h) situé sur la directrice de (H) sera

$$(\Gamma) \quad x[x^2 + (y-h)^2] + 2hx(y-h) - p[x^2 - (y-h)^2] = 0,$$

la cubique circulaire (Γ) admettant pour asymptote

$$x + p = 0.$$

points à l'infini, les deux cubiques (Γ) et (Γ'_1) ont en commun les six sommets de ABCDEF. Ayant neuf points communs, elles coïncident donc. De ce que les asymptotes des deux cubiques (Γ) et (Γ'_1) coïncident, nous en concluons :

Théorème VI. — *Étant donné un quadrilatère circonscrit à un cercle* (O), *si l'on considère les deux paraboles* (P) *et* (H) *qui sont l'une inscrite dans ce quadrilatère, l'autre inscrite dans le triangle formé par les diagonales et admettant pour directrice la droite de Newton* Δ *de ce quadrilatère, elles ont pour foyers deux points tels que la droite qui les joint est parallèle à* Δ.

Théorème VII. — *La cubique* (Γ) *lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle* (o) *peut être considérée comme la podaire du centre* O *de ce cercle par rapport à la parabole* (H).

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1889;

Par M. G. LEINEKUGEL,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

1° Prenons pour équations du cercle et de la parabole les équations suivantes

$$C = u^2 + v^2 - \rho^2 = 0,$$
$$P = au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2cu + 2c'v = 0.$$

L'équation des coniques Γ inscrites dans le quadrila-

tère circonscrit à C et à P sera

$$\Gamma = \lambda C + P = 0.$$

Soient u_0, v_0 les coordonnées de la droite A ; l'équation du pôle sera

$$u\Gamma'_{u_0} + v\Gamma'_{v_0} + w\Gamma'_{w_0} = 0.$$

Pour que ce pôle soit l'origine, il faut que

$$\Gamma'_{u_0} = 0,$$
$$\Gamma'_{v_0} = 0,$$

ou

$$\lambda u_0 + P'_{u_0} = 0,$$
$$\lambda v_0 + P'_{v_0} = 0;$$

d'où pour l'enveloppe

(H) $$u P'_v - v P'_u = 0,$$

équation d'une parabole (H) inscrite dans le triangle autopolaire commun à C et à P et admettant pour directrice la droite $cx - c'y = 0$.

2° Une tangente de coordonnées u_0, v_0 à Γ

$$[\Gamma(u_0, v_0) = 0]$$

a son point de contact déterminé par l'équation

$$u\Gamma'_{u_0} + v\Gamma'_{v_0} + w\Gamma'_{w_0} = 0.$$

Le point situé à l'infini sur cette tangente a pour équation

$$uv_0 - vu_0 = 0.$$

Pour que ces deux points soient vus de l'origine sous un angle droit, ce qui exprime que la normale à Γ au point de contact de la tangente de coordonnées (u_0, v_0) passe par l'origine, il faut que

$$\frac{\Gamma'_{u_0}}{\Gamma'_{v_0}} \frac{v_0}{u_0} = 1 \qquad \text{où} \qquad \frac{\Gamma'_{u_0}}{u_0} = \frac{\Gamma'_{v_0}}{v_0} = \frac{u_0\Gamma'_{u_0} + v_0\Gamma'_{v_0}}{u_0^2 + v_0^2};$$

en tenant compte de la relation

$$\Gamma(u_0, v_0) = u_0\Gamma'_{u_0} + v_0\Gamma'_{v_0} + w_0\Gamma'_{w_0} = 0.$$

on obtient

$$\frac{\lambda u_0 + P'_{u_0}}{u_0} = \frac{\lambda v_0 + P'_{v_0}}{v_0} = \frac{-\lambda\rho^2 + P'_{w_0}}{-(u_0^2 + v_0^2)} = -\mu.$$

Le lieu s'obtiendra en éliminant λ, μ entre les trois équations suivantes

$$\begin{gathered} \lambda u_0 + \mu u_0 + P'_{u_0} = 0, \\ \lambda v_0 + \mu v_0 + P'_{v_0} = 0, \\ -\lambda\rho^2 - \mu(u_0^2 + v_0^2) + P'_{w_0} = 0; \end{gathered}$$

l'élimination donne

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_0 & P'_{u_0} \\ v_0 & v_0 & P'_{v_0} \\ -\rho^2 & -(u_0^2 + v_0^2) & P'_{w_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première ligne par u_0, la deuxième par v_0, et ajoutons à la troisième, on a

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_0 & P'_{u_0} \\ v_0 & v_0 & P'_{v_0} \\ C & 0 & P \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et en supprimant les indices,

$$C(uP'_v - vP'_u) = 0.$$

Le lieu se compose donc de la parabole (H) et du cercle C.

L'équation du système des axes de la conique Γ est

$$\begin{aligned} & b''[(\lambda u + P'_u)^2 - (\lambda v + P'_v)^2] \\ & \quad -(a - a')[\lambda u + P'_u](\lambda v + P'_v) = 0, \end{aligned}$$

ou, ordonnée par rapport à λ,

$$\begin{aligned} & \lambda^2[b''^2(u^2 - v^2) - (a - a')uv] \\ & \quad + \lambda[2b''(uP'_u - vP'_v) - (a - a')(uP'_v + vP'_u)]^2 \\ & \qquad + b''(P'^2_u - P'^2_v) - (a - a')P'_u P'_v = 0. \end{aligned}$$

L'enveloppe est, par suite,

$$\begin{aligned} & [2b''(uP'_u - vP'_v) - (a - a')(uP'_v + vP'_u)]^2 \\ & \quad - 4[b''(u^2 - v^2) - (a - a^2)uv] \\ & \qquad \times [b''(P'^2_u - P'^2_v) - (a - a^2)P'_u P'_v] = 0. \end{aligned}$$

En simplifiant, il vient

$$(v P'_u - u P'_v)^2 [4 b''^2 + (a - a')^2] = 0.$$

On retrouve donc la même parabole (H).

La podaire de l'origine s'obtient en remplaçant dans l'équation de (H) u et v par les valeurs suivantes

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

elle a pour équation

$$(x^2 + y^2)(cx - c'y) + b''(x^2 - y^2) + (a' - a)xy = 0.$$

C'est une cubique circulaire à point double réel, les tangentes en ce point double étant rectangulaires.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1888.

PREMIÈRE SESSION.

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 12352^{\text{m}},22,$$
$$b = 15637^{\text{m}},43,$$
$$c = 18211^{\text{m}},65.$$

On demande de calculer les trois angles, la surface et la longueur de la bissectrice de l'angle A de ce triangle.

Géométrie analytique.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point A sur l'axe des x, on considère le faisceau des coniques pour lesquelles l'axe des y est une directrice et le point A un sommet de l'axe focal. Par un point quelconque M du plan des axes passent deux coniques de ce faisceau, réelles ou imaginaires.

1° Déterminer les parties du plan dans lesquelles doit être

le point M pour que les deux coniques du faisceau qui passent par ce point soient réelles, et celles où il doit être pour que les deux coniques soient imaginaires. (La ligne de séparation est de degré supérieur au second.)

2° Reconnaître, d'après la position d'un point par lequel passent deux coniques réelles, le genre de ces coniques.

3° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine des coordonnées à toutes les coniques du faisceau considéré.

Chimie.

1° Indiquer les usages de l'acide sulfurique, en donnant, sous forme de tableau synoptique, les réactions de préparation des divers corps pour lesquelles on emploie cet acide.

2° On donne dans un eudiomètre 40^{cc} d'un mélange d'oxyde de carbone et d'hydrogène. On y ajoute 20^{cc} d'oxygène et on enflamme le mélange des gaz par une étincelle électrique.

Il se dépose de l'eau sur les parois de l'eudiomètre et il reste dans l'appareil un résidu de 20^{cc} d'acide carbonique absorbable totalement par la potasse.

On demande de déterminer à l'aide de ces données la composition du mélange gazeux mis en expérience.

On donne les équivalents en volume :

$$CO = 2^{vol}, \qquad O = 1^{vol}.$$
$$H = 2^{vol}, \qquad CO^2 = 2^{vol}.$$
$$HO = 2^{vol}.$$

Physique.

1. Quelles sont les expressions x et y des tensions, mesurées à o et à t degrés, de l'acide carbonique sec emmagasiné dans un ballon en verre fermé qui reste en équilibre dans l'air dans des conditions de température, de pression et d'état hygrométrique données.

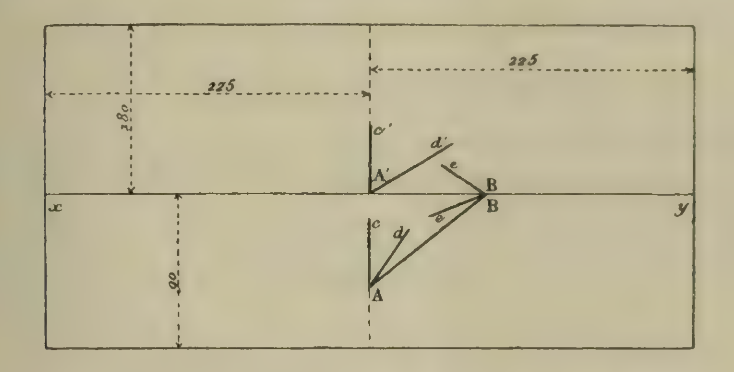
2. Exemple numérique :

Volume extérieur du ballon à o°............ $V = 12^{lit},575$
Volume intérieur............................ $U = 12^{lit},571$
Poids de l'enveloppe........................ $\pi = 6^{gr},348$
Température................................. $t = 32^{o}$

Pression atmosphérique....................	$H = 76^{cm},83$
État hygrométrique.........................	$e = 0,68$
Tension maxima de la vapeur d'eau à $t°$.....	$F = 3^{cm},536$
Coefficient de dilatation de l'enveloppe......	$K = 0,000025$
Coefficient de dilatation du gaz.............	$\alpha = 0,003665$
Poids du litre d'air à 0° et 76^{cm} de pression..	$a = 1^{gr},293$
Densité de l'acide carbonique...............	$d = 1,529$

Épure.

On donne dans le plan horizontal une droite AB, A′B′ de 100^{mm} de longueur, faisant un angle de 45° avec la ligne de



terre. Par le point A, on mène une droite Ac, A′c′ également inclinée sur les deux plans de projection; puis, ensuite, on mène la bissectrice Ad, A′d′ de l'angle cAB, c′A′B′. Par le point B, B′ dans le plan des deux droites AB, A′B′, Ac, A′c′, on mène une droite Be, B′e′ faisant avec AB, A′B′ un angle eBA, e′B′A′ de 30°.

On considère maintenant la surface conique engendrée par la droite Ac, A′c′ tournant autour de Ad, A′d′, puis la surface conique engendrée par la droite AB, A′B′ tournant autour de Be, B′e′, et l'on demande de déterminer l'intersection de ces deux surfaces coniques.

Dans la mise à l'encre, on supposera que la surface conique ayant comme sommet B, B′ n'existe pas, et que, de l'autre surface (supposée opaque), il n'existe que la partie comprise entre le sommet A′, A et l'intersection des deux surfaces coniques.

On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point,

celle des points remarquables et des tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée dans la partie gauche de l'épure.

Titre extérieur : *Géométrie descriptive.* Titre intérieur : *Intersection de deux surfaces coniques.*

On prendra la ligne de terre parallèle aux grands côtés du cadre et à 90^{mm} du côté inférieur du cadre. La projection verticale A′ du sommet A se trouve sur la ligne de terre, à égale distance des deux petits côtés du cadre.

SECONDE SESSION.

Calcul trigonométrique.

Calculer les angles d'un triangle et le rayon du cercle circonscrit, connaissant les trois côtés

$$a = 44351,22,$$
$$b = 59134,96,$$
$$c = 73918,70.$$

Géométrie analytique.

On donne une ellipse rapportée à ses axes

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et, dans son plan, un point P (p, q) par lequel on mène deux droites parallèles aux bissectrices des angles des axes. On considère toutes les coniques passant par les points d'intersection de ces droites avec l'ellipse donnée. Écrire l'équation générale de ces coniques; trouver le lieu de leurs centres et distinguer les portions de cette courbe qui correspondent à des centres d'ellipse ou à des centres d'hyperbole.

On prend la polaire de l'origine des coordonnées par rapport à chacune des coniques et on abaisse, du point P, une perpendiculaire sur cette polaire. Trouver le lieu des pieds de ces perpendiculaires. Parmi les coniques considérées se trouvent deux paraboles: trouver leurs foyers pour une position donnée

du point P et les lieux de ces foyers lorsque le point P parcourt : 1° une des bissectrices des axes de l'ellipse donnée, 2° la circonférence circonscrite au rectangle des axes de cette ellipse.

Physique.

Un ballon vide pèse 250gr; plein d'air il pèse 257gr,80 ; plein d'un autre gaz, il pèse 264gr,68.

On demande de calculer la densité de ce gaz par rapport à l'air :

1° Dans le cas où la pression et la température sont les mêmes pendant toute la durée des pesées ;

2° Dans le cas où, la température restant la même, la pression a été de 0m,770 pendant la pesée du ballon plein d'air, et 0m,780 pendant la pesée du ballon plein de gaz ;

3° Dans le cas où, la pression restant la même, la température a été 15° pendant la pesée du ballon rempli d'air, et 25° pendant la pesée du ballon rempli de gaz ;

4° Dans le cas où, pour la pesée du ballon plein d'air, la pression a été 0m,770 et la température 15° et, pour la pesée du ballon plein de gaz, la pression a été 0m,780 et la température 25°.

On donne

$$\alpha \text{ coefficient de dilatation du gaz} = 0,00367.$$

Chimie.

1° Décrire les préparations et les expériences dans lesquelles on fait usage du chlorate de potasse.

2° Analyse du bioxyde d'azote.

Épure.

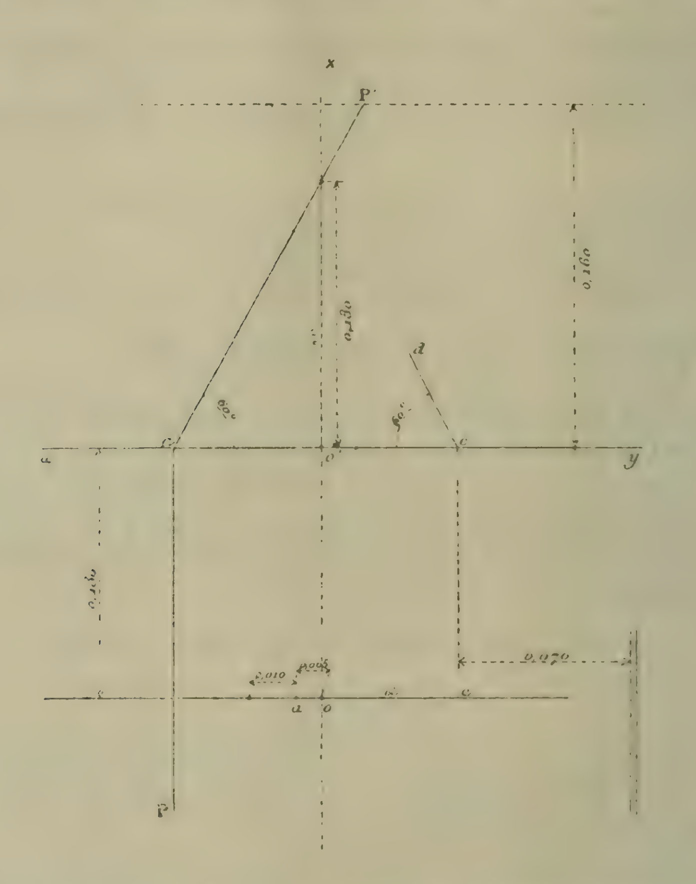
On donne :

1° Un cylindre de révolution F dont l'axe est la droite de front *cd*, *c'd'* ; cette droite, qui fait un angle de 60° avec le plan horizontal, est éloignée de 0m,13 du plan vertical de projection ; la trace horizontale *c* est à 0m,070 du côté vertical de droite du cadre ; le rayon du cylindre est de 0m,05.

2° Une surface de révolution H engendrée par une hyperbole tournant autour de l'axe vertical O, O'*z'* situé dans le même plan de front que l'axe du cylindre ; le point O est à égale

distance des deux côtés verticaux du cadre. L'hyperbole génératrice est située dans un plan P′αP perpendiculaire au plan vertical et faisant un angle de 60° avec le plan horizontal.

Ce plan rencontre l'axe de la surface en un point dont la cote est $0^{m},13$. L'axe de l'hyperbole est l'intersection du plan



P′αP et du plan de front qui passe par l'axe de la surface de révolution. La projection horizontale de l'hyperbole a le point O pour un de ses foyers, le point *a* pour sommet correspondant, le point ω pour centre; la distance O*a* est de 0,005 et la distance *a*ω de 0,010. Les points *a* et ω sont tous deux à gauche du point O.

Cela posé, on demande de trouver les projections de l'intersection des deux surfaces F et H.

Dans la mise à l'encre, on représentera le cylindre comme si c'était un corps plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans la surface H. On limitera le cylindre

par le plan horizontal de projection et par un autre plan horizontal situé au-dessus et à $0^m.160$ du premier. On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende. Titre extérieur : *Géométrie descriptive*. Titre intérieur : *Intersection de surfaces*. Prendre la ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à égale distance de ces deux côtés.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PASCAL;

PAR M. ALEXANDRE RENON,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

Soit ABCDEF un hexagone inscrit dans une conique. Les côtés AB, BC, CD coupent respectivement DE, EF et FA en trois points L, M et N. Les trois premiers côtés forment un triangle BCH, les trois autres un triangle EFK. Pour démontrer que L, M et N sont en ligne droite, il suffit de démontrer que ces deux triangles sont homologiques, et, pour cela, que les trois droites BE, HK et CF concourent. La droite HK coupe la conique en P et Q et les droites AC, AE en C′ et E′. Tout revient à démontrer que les deux faisceaux A(BPC), A(FQE) sont en involution. Or, si nous appliquons le théorème de Desargues au quadrilatère ACDE inscrit dans la conique et coupé par HK, nous voyons que les couples HE′, PQ, KC′ sont en involution. Donc les deux faisceaux A(BPC), A(FQE) sont en involution ; les droites BE, HK et CF concourent et le théorème de Pascal se trouve démontré.

SUR UN DÉPLACEMENT PARTICULIER D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE;

PAR M. A. MANNHEIM.

Extrait du Tome III (1889) des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.*

Dans mon travail *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace* ([1]), j'ai démontré que : *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse.*

Je suis arrivé à ce théorème en faisant usage de quelques propositions de *Géométrie cinématique.*

Certes, la découverte d'une vérité géométrique constitue toujours un progrès, quelle que soit la voie suivie pour y parvenir. Mais, à côté de ce progrès, il y en a un autre d'ordre différent, qui consiste à démontrer *géométriquement* une vérité géométrique, en ne recourant qu'au plus petit nombre possible de propriétés primordiales.

Les démonstrations données par plusieurs géomètres du théorème que je viens de rappeler ne répondent pas à cette idée. C'est pourquoi, le reprenant moi-même, j'ai entrepris l'essai suivant.

En outre, j'ai réuni dans le présent travail quelques

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séances des 3 et 10 mars 1873, et *Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 106.

théorèmes qui se rattachent directement à celui énoncé plus haut et j'ai terminé en étudiant d'une façon purement géométrique ce qui est relatif au déplacement d'une figure dont chacun des points décrit une ellipse.

§ I. — Sur le déplacement dans l'espace d'une droite dont tous les points décrivent des ellipses.

Théorème I. — *On donne quatre plans* (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), *et une droite* D *qui les rencontre aux points* p_1, p_2, p_3, p_4 : *d'un point quelconque de l'un des plans on peut mener une droite, et une seule, qui soit partagée par les plans donnés comme ceux-ci partagent* D.

Soit a_1 un point quelconque de (P_1). Menons un plan parallèle à (P_2) et à une distance telle, qu'une droite arbitraire, issue de a_1, soit partagée par (P_2) et ce plan parallèle, en segments dont le rapport est égal à $\frac{p_1p_2}{p_1p_4}$. Ce plan parallèle à (P_2) coupe (P_4) suivant une droite. On obtient une droite analogue sur (P_4) en opérant avec (P_3) comme nous venons de le faire avec (P_2).

Ces deux droites se coupent en un point a_4 : la droite a_1a_4 est la droite demandée et il résulte de sa construction qu'elle est unique.

Pour simplifier le langage, je dirai que la droite a_1a_4 est *proportionnelle à* D et que les points a_1, a_2, a_3, a_4 où elle rencontre les plans donnés sont des *points correspondants*.

Remarque. — *La droite proportionnelle à* D *qui passe par un point à l'infini sur l'un des plans est tout entière à l'infini.*

Théorème II. — *Sur chacun des plans donnés les*

points correspondant aux points d'une droite arbitraire $a_1 b_1$ de l'un d'eux sont en ligne droite.

Des points a_1, b_1 menons les droites $a_1 a_4$, $b_1 b_4$ proportionnelles à D et formons le quadrilatère $a_1 b_1 a_4 b_4$. Les droites $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ partagent, comme l'on sait, en segments proportionnels aux segments de D toutes les droites qui divisent proportionnellement les côtés $a_1 b_1$, $a_4 b_4$: de là résulte le théorème énoncé.

Je dirai que les droites $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ sont *correspondantes.*

Théorème III. — *On construit des droites proportionnelles à* D *et l'on prend sur chacune de ces droites le point homologue à un point arbitraire* p_5 *de* D : *tous ces points appartiennent à un même plan* (P_5).

Il résulte de la démonstration du théorème précédent que les points homologues de p_5, sur les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur $a_1 b_1$ appartiennent à une droite $a_5 b_5$. On peut dire la même chose pour toutes les droites issues de p_1 qui s'appuient sur $a_1 b_1$. On obtient ainsi des droites partant de p_5 et qui s'appuient sur $a_5 b_5$. Le lieu de ces droites est un plan (P_5) qui contient d'après cela l'homologue de p_5 pris sur une droite quelconque proportionnelle à D.

Par chacun des points de D passe un plan, tel que (P_5). Je dirai que *tous ces plans appartiennent au système des quatre plans donnés.*

Remarque. — Du théorème II résulte qu'*à une droite de l'un des plans du système correspond une droite sur tous les autres.*

Théorème IV. — *Si l'on prend sur l'un des plans du système des droites convergentes en un point à dis-*

tance finie ou infinie, il leur correspond, sur tous les autres plans, des droites convergentes en un point à distance finie ou infinie.

Ce théorème se démontre immédiatement en employant la droite proportionnelle à D qui passe par le point de convergence des droites données.

Théorème V. — *A une conique tracée sur l'un des plans du système correspond une conique sur chacun des autres plans du système.*

A une droite de l'un des plans du système correspond une droite sur chacun des autres plans, par suite à une courbe d'un certain ordre correspond une courbe de ce même ordre sur chacun des autres plans du système. En particulier, ceci est vrai pour une conique tracée sur l'un des plans du système.

Théorème VI. — *Si une conique* C_1 *tracée sur* (P_1) *est une ellipse, les courbes correspondantes sont aussi des ellipses.*

Car C_1 n'ayant pas de point à l'infini il en est de même sur les coniques correspondantes.

Théorème VII. — *Les centres des coniques correspondantes* C_1, C_2, C_3 *sont des points correspondants.*

En effet, une tangente à C_1 a pour correspondantes des tangentes aux coniques correspondantes C_2, C_3, ... Deux tangentes à C_1, qui sont parallèles, ont pour correspondantes, d'après le théorème IV, des tangentes parallèles pour chacune des ellipses correspondant à C_1. Par suite, les diamètres de contact de ces tangentes parallèles se correspondent et alors aussi les centres des ellipses correspondantes.

Appliquons les théorèmes précédents : prenons un ellipsoïde (S) et coupons-le par un plan arbitraire (P). Appelons S la section ainsi obtenue. On sait que *les normales à* (S), *dont les pieds sont les points de* S, *sont partagées par* (P) *et les plans principaux de* (S) *en segments proportionnels,* c'est-à-dire que *ces normales sont des droites proportionnelles.*

De ce que nous venons de démontrer il résulte que :

Les traces de ces normales sur les plans principaux de (S) *sont des ellipses,* que *les centres de ces courbes sont sur une droite qui passe par le centre de* S et enfin que *cette droite des centres est proportionnelle aux normales de* (S).

Prenons l'ellipsoïde concentrique et homothétique à (S) qui est tangent à (P). Son point de contact avec (P) est, comme l'on sait, le centre de S. La perpendiculaire à (P) élevée de ce centre est la normale à cet ellipsoïde. Comme cette surface est homothétique à (S), cette normale est proportionnelle aux normales de (S) : elle est alors la droite des centres des ellipses qui entrent dans le dernier énoncé. On peut donc compléter celui-ci en disant : *Cette droite des centres est perpendiculaire au plan* (P).

Reprenons maintenant les plans du système et la droite D dont nous nous sommes servis d'abord.

J'appelle *droite égale* à D une droite sur laquelle les plans du système déterminent des segments égaux aux segments que ces plans déterminent sur D.

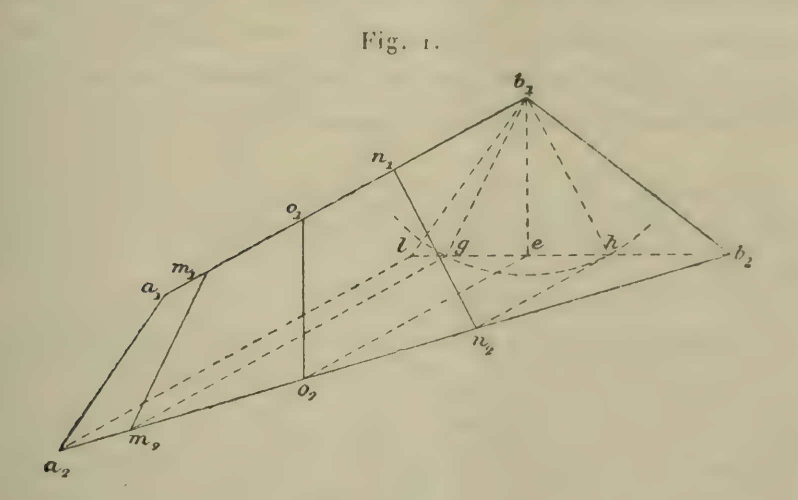
Théorème VIII. — *Sur une droite arbitraire* $a_1 b_1$ *de* (P_1), *il ne peut y avoir que deux points par lesquels passent des droites égales à* D.

Par a_1 et b_1 (*fig.* 1) menons des droites proportion-

nelles à D; elles rencontrent (P_2) en a_2 et b_2. Par a_2 menons la droite $a_2 l$, égale et parallèle à $a_1 b_1$, puis menons la droite lb_2. Sur le plan $b_1 l b_2$ décrivons du point b_1 comme centre une circonférence ayant un rayon égal au segment compris sur D entre (P_1) et (P_2).

Cette circonférence coupe lb_2 aux points g, h; de ces points menons gm_2, hn_2 parallèlement à $a_2 l$. Les points m_2, n_2, où ces droites rencontrent $a_2 b_2$ appartiennent aux droites égales demandées : l'une $m_2 m_1$ est parallèle à gb_1, l'autre $n_2 n_1$ est parallèle à hb_1.

Fig. 1.



D'abord les segments $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sont égaux, puisqu'ils sont respectivement égaux aux segments égaux gb_1, hb_1; ensuite ils appartiennent à des droites proportionnelles à D, puisque $a_1 a_2$, $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, étant parallèles au plan $lb_1 b$, partagent $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$ en segments proportionnels.

On voit ainsi que les droites égales qui s'appuient sur $a_1 b_1$ sont les deux seules droites $m_1 m_2$, $n_1 n_2$.

Remarques. — Lorsque l'arc décrit du point b_1 comme centre coupe $l_2 b$ en deux points, il y a deux droites égales qui s'appuient sur $a_1 b_1$. Mais, si cet arc est

tangent à lb_2 il n'y a plus qu'une droite égale $o_1 o_2$ dont la longueur est celle de la perpendiculaire abaissée de b_1 sur lb_2. La droite $o_1 o_2$ est alors, parmi les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur $a_1 b_1$, celle sur laquelle les plans du système interceptent les plus petits segments. L'arc tangent à lb_2 touche cette droite au milieu de gh. De tout cela résulte que :

La droite proportionnelle à D *qui s'appuie sur* $a_1 b_1$ *et sur laquelle il y a les plus petits segments, est la droite* $o_1 o_2$ *qui joint les milieux des segments* $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ *déterminés sur les droites correspondantes* $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ *par deux droites égales. Le segment* $o_1 o_2$ *est égal à la bissectrice du triangle isoscèle* $g b_1 h$.

Théorème IX. — *Le lieu des points d'un plan du système d'où partent des droites égales est une ellipse* E.

Ce lieu est une conique, puisque, d'après le théorème précédent, une droite quelconque de ce plan ne le rencontre qu'en deux points. Cette conique est une ellipse, car il ne peut y avoir de point à l'infini, puisque d'un pareil point on ne peut mener une droite égale à une droite donnée à distance finie.

Remarque. — On peut encore énoncer ainsi ce théorème :

Si l'on déplace une droite de façon que quatre de ses points restent sur quatre plans donnés, tous ses points décrivent simultanément des ellipses.

Ces ellipses sont des courbes correspondant à E et, en vertu du théorème VII, *leurs centres sont en ligne droite.*

Nous avons ainsi retrouvé le théorème rappelé au

commencement de ce travail en y ajoutant ce qui concerne la nature du lieu des centres des ellipses décrites.

Théorème X. — *La droite O des centres des ellipses correspondant à E est, parmi les droites proportionnelles à D, celle sur laquelle les segments interceptés par les plans du système sont les plus petits possibles* (1).

Avec une corde de direction arbitraire de l'ellipse E, la corde de l'ellipse correspondante sur (P_2) et les droites égales qui réunissent les extrémités de ces droites, on forme un quadrilatère gauche analogue au quadrilatère $m_1 m_2 n_1 n_2$ de la *fig.* 1.

D'après ce que nous avons vu la droite proportionnelle à D qui s'appuie sur ces cordes, et sur laquelle il y a les plus petits segments, s'obtient en joignant par une droite les milieux de ces cordes. Pour chacune des cordes de E parallèles entre elles, on obtient ainsi une droite qui passe par le milieu de cette corde; toutes ces droites s'appuient sur le diamètre dont la direction est conjuguée de celle de ces cordes parallèles.

On peut répéter pour ce diamètre ce que je viens de dire pour une corde et l'on trouve ainsi que la droite proportionnelle à D, sur laquelle les plans du système interceptent les plus petits segments, passent par le centre de E et alors aussi par les centres des ellipses correspondant à cette courbe. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Théorème XI. — *Les droites égales, qui s'appuient*

---

(1) Halphen, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 114.

sur E, *sont également inclinées sur la droite* O *des centres des ellipses correspondant à* E.

Supposons que $m_1 n_1$ (*fig.* 1) soient les extrémités d'un diamètre de E. Parmi les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur ce diamètre, celle sur laquelle il y a les plus petits segments est la droite $o_1 o_2$ qui est égale, comme nous l'avons vu, à la bissectrice du triangle isoscèle $g b_1 h$ dont les côtés égaux sont parallèles à $m_1 m_2$, $n_1 n_2$. Les droites égales $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sont alors également inclinées sur $o_1 o_2$. Mais, pour un autre diamètre de E, on est toujours conduit à construire un triangle isoscèle égal à $g b_1 h$, puisque les côtés de ce triangle doivent être égaux à $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ et que la bissectrice doit être égale à $o_1 o_2$. Ces triangles isoscèles étant égaux, le théorème est démontré.

Théorème XII. — *La distance* $o_1 o_2$ *des centres des ellipses décrites par les points* m_1, m_2 *d'une droite égale mobile est égale à la projection du segment* $m_1 m_2$ *sur la droite* O.

Cela résulte de ce que $o_1 o_2$ est égale et parallèle à la bissectrice du triangle isoscèle $g b_1 h$ et que cette bissectrice est en même temps la hauteur de ce triangle.

Théorème XIII. — *Les points de deux droites proportionnelles à* D *qui se déplacent en restant chacune égale à elle-même décrivent sur chacun des plans donnés des ellipses concentriques et homothétiques* [1].

Quelle que soit la droite proportionnelle que l'on prenne comme droite égale mobile, on a toujours le même centre pour les ellipses décrites sur l'un des plans donnés parce que ce point est sur la droite unique O.

---

[1] Halphen, *loc. cit.*

proportionnelle à D, sur laquelle les plans donnés déterminent les segments les plus petits possibles.

Prenons (*fig.* 1) les droites proportionnelles $n_1 n_2 n_3$ et $b_1 b_2 b_3$ qui partent de deux points d'une droite issue de o_1. On a

$$\frac{o_1 n_1}{o_1 b_1} = \frac{o_2 n_2}{o_2 b_2} = \frac{eh}{eb_2}.$$

Ce dernier rapport est constant, quelle que soit la position de b_1 sur E, puisque les triangles isoscèles, tels que $g b_1 h$ sont toujours égaux et que $b_1 b_2$ est un segment de grandeur constante.

Le rapport $\frac{o_1 n_1}{o_1 b_1}$ est alors constant et le théorème est démontré.

Voici une application des théorèmes précédents :

Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans donnés, un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde qui a pour centre le point de rencontre des plans donnés.

Ajoutons un quatrième plan passant par le quatrième point de la droite mobile. Si l'on déplace maintenant la droite de façon que ce point reste sur ce plan, il décrira une ellipse. La section faite par ce plan dans la surface engendrée est donc une ellipse. Comme ceci est vrai, quel que soit ce plan, cette surface est donc un ellipsoïde.

Si le plan mené par le point décrivant passe par le point de rencontre des trois plans donnés, il résulte du théorème X que ce point est le centre de l'ellipse décrite. Ce plan, mené par le point de rencontre des plans donnés, étant arbitraire, ce dernier point est le centre de l'ellipsoïde engendré par le quatrième point de la droite mobile. Le théorème est donc démontré.

Ce théorème, qui est dû à Dupin, donne lieu à ce cas particulier intéressant :

Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent respectivement sur trois plans parallèles à une droite, un quatrième point de cette droite décrit un plan.

Je ne fais qu'énoncer ce résultat, ayant laissé de côté les cas particuliers des théorèmes démontrés dans ce premier paragraphe.

§ II. — Sur le déplacement dans l'espace d'une figure de grandeur invariable dont les points décrivent des ellipses.

Comme figure de grandeur invariable nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'une droite égale mobile dont quatre points restent sur quatre plans fixes. Nous allons montrer comment la propriété de cette droite, de faire toujours, pendant son déplacement, le même angle avec la droite des centres des ellipses décrites par ses points, conduit aisément à déterminer les conditions de déplacement d'une figure de forme invariable dont chacun des points décrit une ellipse.

Conservons les notations précédentes avec cette seule différence que nous appellerons D' la droite désignée précédemment par D. Plaçons O verticalement, appelons (H) un plan horizontal fixe. La droite égale mobile D', se déplaçant toujours de façon que quatre de ses points restent sur les plans (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), fait constamment le même angle avec (H).

Appelons D la projection de D' sur le plan (H).

Puisque, comme nous l'avons démontré, les points de D' décrivent des ellipses dont les centres sont sur O,

les points de la droite D décrivent des ellipses concentriques dont le centre commun est le pied o de O sur (H).

Lemme. — *Le déplacement sur* (H) *de la droite* D, *dont les points décrivent des ellipses concentriques, peut être obtenu en liant cette droite à une circonférence qui roule dans l'intérieur d'une autre de rayon double.*

Pour un déplacement infiniment petit de D, on a un centre instantané de rotation c. La circonférence décrite sur oc comme diamètre rencontre (je le suppose d'abord) D en deux points réels. Les normales aux trajectoires de ces points passent par c et par suite les tangentes à ces trajectoires passent par o. Mais les trajectoires de ces points sont des ellipses et il ne peut y avoir pour une pareille courbe de tangente passant par le centre que si cette courbe est infiniment aplatie : ces deux points décrivent donc chacun une droite et le déplacement de D est alors celui d'une droite dont deux points décrivent chacun une droite.

Un pareil déplacement peut être obtenu, comme l'on sait, en supposant que D soit lié à la circonférence $\frac{C}{2}$ décrite sur oc comme diamètre que l'on fait rouler à l'intérieur de la circonférence C décrite du point o comme centre avec oc pour rayon.

Mais ces circonférences existent toujours et ne dépendent aucunement de la réalité des points de rencontre de D avec la circonférence décrite sur oc comme diamètre; par conséquent le résultat auquel nous venons d'arriver est général et le lemme est démontré.

Nous savons que D′ fait toujours un angle constant avec sa projection D. On obtiendra alors le déplacement

de D′ en supposant que sur son plan projetant, entraîné avec D, cette droite soit transportée en même temps parallèlement à la direction des projetantes, c'est-à-dire qu'elle glisse dans la direction de O.

D'après cela, appelons (Cy) le cylindre dont C est la section droite, et $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ le cylindre dont $\frac{C}{2}$ est la section droite; nous obtiendrons le déplacement de D′ en liant cette droite au cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ qui roule à l'intérieur de (Cy), en même temps qu'il glisse dans la direction de ses génératrices, de façon qu'un point de D′ soit assujetti à se déplacer sur le plan du système qui le contient ([1]).

Le déplacement de $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ étant ainsi défini, on peut entraîner une figure de forme invariable avec ce cylindre mobile. Nous savons déjà que tous les points de D′ décrivent des ellipses. Nous allons montrer qu'il en est de même de tous les points de la figure entraînée. Pour cela il suffit de faire voir que la trajectoire d'un quelconque de ces points est une ligne plane, puisque la projection de cette trajectoire sur (H) est la ligne décrite par un point du plan de $\frac{C}{2}$ qui roule dans C, et l'on sait que cette courbe est une ellipse.

Pour y arriver démontrons d'abord le théorème suivant, qu'on n'avait pas encore énoncé :

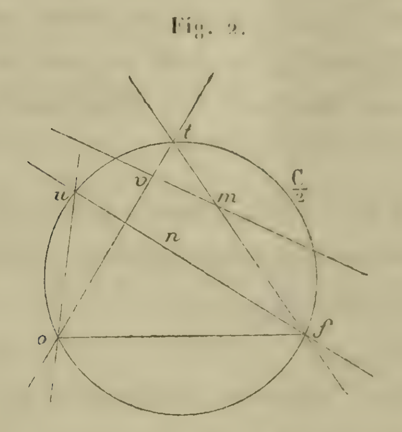
Théorème XIV. — *Le cylindre* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ *roule à l'intérieur de* (Cy) *et glisse de façon qu'un point* m' *se dé-*

([1]) *Voir* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* la Communication faite par M. Darboux le 17 janvier 1881 : *Sur le déplacement d'une figure invariable.*

place sur un plan fixe donné : parmi tous les points entraînés il y en a une infinité qui décrivent des droites.

Soit (M) le plan donné sur lequel se déplace m'; supposons que le plan horizontal (H) passe maintenant par le point de rencontre de (M) et de O; désignons toujours par o ce point de rencontre.

Fig. 2.



Prenons le plan (H) pour plan de la *fig.* 2. Soit ot l'horizontale de (M) qui passe par o. Menons par m' l'horizontale $m't'$ qui se projette sur (H) suivant la droite mt qui passe par le point de rencontre t de $\frac{C}{2}$ et de l'horizontale ot du plan (M).

L'horizontale $m't'$, menée ainsi par m', rencontre le cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ au point f' dont la projection est f.

Lorsque $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ roule et glisse, comme nous l'avons dit, le point t' se déplace dans le plan vertical ot. Je dis que le point f' décrit une ligne droite.

La ligne décrite par f' se projette sur (H) suivant la ligne of.

Sa projection sur le plan vertical of, faite au moyen de parallèles à ot, est une droite, comme la projection

de (M) sur ce plan. Car les perpendiculaires à O abaissées des points de cette dernière droite sont partagées dans un rapport constant par cette projection de la trajectoire de f', puisque ce rapport est toujours égal à $\frac{mt}{ft}$.

La trajectoire de f' se projetant suivant des droites sur deux plans différents est donc une droite.

Comme tous les points de la verticale, qui contient f', décrivent des lignes égales à la trajectoire de ce point, ils décrivent des droites. Le théorème est donc démontré.

Théorème XV. — *En dehors des points de la verticale f', tous les points invariablement liés au cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ décrivent des ellipses.*

Par le point f' menons arbitrairement l'horizontale $f'u'$ dont la projection (*fig.* 2) est fu. Un point quelconque n de cette droite, entraînée avec $\left(\frac{Cy}{2}\right)$, décrit une ligne plane, car la projection de cette ligne, faite sur le plan vertical of par des parallèles à ou, partage dans un rapport constant les perpendiculaires abaissées des points de la droite of' sur O. La trajectoire de n' se projette sur (H) suivant une ellipse, puisque cette courbe est engendrée par le point n du segment de grandeur constante uf dont les extrémités décrivent les droites ou et of. La trajectoire de n' est donc une ellipse.

Les points de la verticale qui contient n' décrivent évidemment des ellipses égales à l'ellipse décrite par ce point. On voit donc que tous les points de toutes les horizontales partant de f', c'est-à-dire tous les points du plan horizontal mené par f', décrivent des ellipses et qu'il en est aussi de même de tous les points de l'espace

qui peuvent toujours être liés au point de ce plan à l'aide de verticales. En résumé, tous les points liés à $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ décrivent des ellipses, excepté les points de la verticale f' qui décrivent des segments de droite, lesquels, à proprement parler, sont des ellipses aplaties.

Remarques. — *Les ellipses décrites par les points du plan horizontal mené par f' ont toutes même centre au point o.*

Les plans des ellipses décrites par les points d'une horizontale menée par f' passent par une même droite issue du centre commun o.

Théorème XVI. — *Les plans des ellipses décrites par les points d'une horizontale arbitraire, liée au cylindre mobile $\left(\frac{Cy}{2}\right)$, enveloppent un cône du second degré.*

Prenons une horizontale arbitraire à la hauteur du point f'. Nous savons construire pour un point m' de cette droite l'horizontale ot du plan de sa trajectoire. Appelons v le point où cette droite rencontre la projection sur (H) de l'horizontale donnée. La droite vm' est alors, sur le plan projetant de cette horizontale, la trace du plan de la trajectoire de m'. Les droites, telles que ft et ot, qui se coupent sur $\frac{C}{2}$ forment deux faisceaux homographiques. Les points, tels que m' et v, déterminent alors deux divisions homographiques, et les droites, telles que vm', qui joignent les points correspondants, enveloppent une conique. Cette conique n'est autre que la trace du cône enveloppe des plans des trajectoires décrites par les points de l'horizontale donnée. Le théorème est donc démontré.

Remarques. — Les plans des trajectoires décrites par les points d'une horizontale étant respectivement parallèles aux plans des trajectoires des points d'une droite entraînée et dont cette horizontale est la projection, *le théorème précédent s'étend à une droite quelconque.*

Il est facile de voir que *la conique, trace du cône sur le plan projetant de la droite donnée, est tangente aux plans horizontaux menés par o et f'.*

Le centre de cette conique appartient à la projection orthogonale, faite sur le plan de cette courbe, de l'axe de $\left(\frac{Cy}{2}\right)$; *il est du reste sur un plan horizontal à égales distances de o et de f'.*

Pour terminer, j'énoncerai les résultats suivants, conséquence de ce qui précède.

Théorème XVII. — *Lorsque les points d'une figure mobile dans l'espace décrivent des ellipses, ces courbes ont leurs centres sur une même droite et leurs projections sur un plan perpendiculaire à cette droite sont des ellipses dont la somme ou la différence des axes est constante.*

Problème. — *Étant donné un plan arbitraire, construire le point lié à* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ *et qui se déplace sur ce plan.*

Le point de rencontre γ du plan donné et de O est le centre de la trajectoire du point demandé. Par le point γ menons l'horizontale du plan donné et par le point où cette droite rencontre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ menons la génératrice de ce cylindre; l'horizontale, qui s'appuie sur cette génératrice et qui passe par le point où $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ est rencontré

par la parallèle à of' menée du point γ, coupe le plan donné au point cherché.

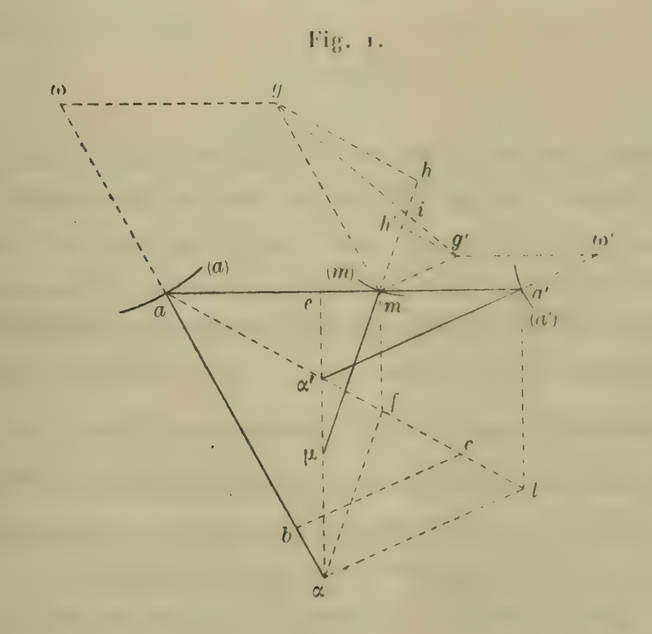
NOTE SUR UN SYSTÈME DE DEUX COURBES PLANES;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Je me propose de résoudre géométriquement des problèmes traités par M. Laisant dans la Communication qu'il a faite à la *Société mathématique de France*, le 18 juillet 1888, sous le titre même que j'ai conservé pour cette courte Note.

On déplace une droite aa' (fig. 1) de façon que les arcs parcourus par ses extrémités soient dans un

Fig. 1.



rapport constant λ et l'on partage aa' de façon que $\frac{am}{ma'} = \lambda$: on demande de déterminer pour la courbe

(m), lieu des points tels que m, sa normale en m et son rayon de courbure.

Commençons par construire le point e où la droite mobile aa' touche son enveloppe. De ce point, supposé connu, élevons une perpendiculaire à aa'. Désignons par α et α' les points de rencontre de cette perpendiculaire et des normales menées en a et a' aux courbes (a) et (a') décrites par ces points. Si $d(a)$ et $d(a')$ désignent les arcs infiniment petits parcourus simultanément par a et a' pendant le déplacement de aa', on a

$$\frac{d(a)}{d(a')} = \lambda.$$

Mais, en vertu d'une formule connue [1],

$$\frac{d(a)}{d(a')} = \frac{a\alpha}{a'\alpha'};$$

donc

$$\frac{a\alpha}{a'\alpha'} = \lambda.$$

On a donc le point e en cherchant le pied d'une perpendiculaire à aa' qui détermine sur les normales à (a) et (a') des segments $a\alpha$, $a'\alpha'$ dont le rapport est donné.

Pour résoudre ce problème de Géométrie élémentaire, prenons le point quelconque b sur $a\alpha$ et, parallèlement à la normale $a'\alpha'$, menons la droite bc sur laquelle nous prenons le point c de manière que $\frac{ab}{bc} = \lambda$.

La droite ac coupe en l la perpendiculaire $a'l$ à aa'. La parallèle $l\alpha$ à la normale $a'\alpha'$ coupe $a\alpha$ au point α dont la projection sur aa' est le point e cherché.

Il y a deux solutions puisque l'on peut porter le seg-

---

[1] Formule 3, page 205 de la deuxième édition du *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim.

ment bc dans le sens contraire où il a été porté sur la figure.

Ces deux solutions correspondent aux cas où, (a) étant parcouru par a dans un même sens, le point a' décrit (a') successivement dans les deux sens opposés.

Normale en m à la courbe (m). — Puisque les points tels que m partagent toujours aa' dans le même rapport λ, on sait (¹) qu'on obtient la normale demandée en joignant le point m au point μ qui est tel que

$$\frac{\alpha\mu}{\mu\alpha'} = \frac{am}{ma'}.$$

Menons mf perpendiculairement à aa'. Cette droite coupe al au point f et l'on a

$$\frac{af}{fl} = \lambda.$$

Mais l'on a aussi

$$\frac{a\alpha}{\alpha l} = \lambda :$$

donc la droite αf est la bissectrice de l'angle $l\alpha a$.

On a

$$mf = a'l\,\frac{am}{aa'} = \alpha\alpha'\,\frac{\alpha\mu}{\alpha\alpha'} = \alpha\mu.$$

Ainsi $mf = \alpha\mu$; par suite, $m\mu$ est parallèle à la bissectrice αf : donc

La normale demandée est également inclinée sur les normales $a\alpha$, $a'\alpha'$ (²).

Rayon de courbure de la courbe (m) pour le point m. — Pour un déplacement de aa', l'angle de $a\alpha$ et de $m\mu$

(¹) *Loc. cit.*, p. 172.

(²) Si a' parcourt (a') dans le sens opposé à celui qui a été adopté, la normale est perpendiculaire à celle qui est tracée sur la figure.

varie. La variation de cet angle est égale à la différence des variations angulaires de $a\alpha$ et $m\mu$. Ces variations angulaires sont égales à $\frac{d(a)}{\rho_a}$ et $\frac{d(m)}{\rho_m}$, en appelant ρ_a et ρ_m les rayons de courbure de (a) et de (m).

Puisque la normale $m\mu$ fait des angles égaux avec $a\alpha$ et $a'\alpha'$, écrivons que les variations de ces angles sont égales ; on a

$$\frac{d(a)}{\rho_a} - \frac{d(m)}{\rho_m} = \frac{d(m)}{\rho_m} - \frac{d(a')}{\rho_{a'}},$$

d'où

$$\frac{d(a)}{d(m)\rho_a} + \frac{d(a')}{d(m)\rho_{a'}} = \frac{2}{\rho_m},$$

$$\frac{a\alpha}{m\mu.\rho_a} + \frac{a\alpha'}{m\mu.\rho_{a'}} = \frac{a}{\rho_m}.$$

Du point m, menons mg égal et parallèle à $a\omega$, rayon de courbure de (a) et du point g, menons gh parallèlement à al. Les triangles semblables $a\alpha f$, gmh donnent

$$\frac{1}{mh} = \frac{a\alpha}{\alpha f.mg} = \frac{a\alpha}{m\mu.\rho_a}.$$

De même,

$$\frac{1}{mh'} = \frac{a'\alpha'}{m\mu.\rho_{a'}}.$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{1}{mh} + \frac{1}{mh'} = \frac{2}{\rho_m}.$$

Si l'on prend en i l'harmonique conjuguée de m par rapport à h et h', il résulte de cette dernière relation que

$$\rho_m = mi.$$

Comme la droite mi est la bissectrice de l'angle $g'mg$, on obtient le point i à la rencontre de la normale $m\mu$ et de la droite gg'; on peut donc dire :

Du point m on mène mg égal et parallèle au rayon

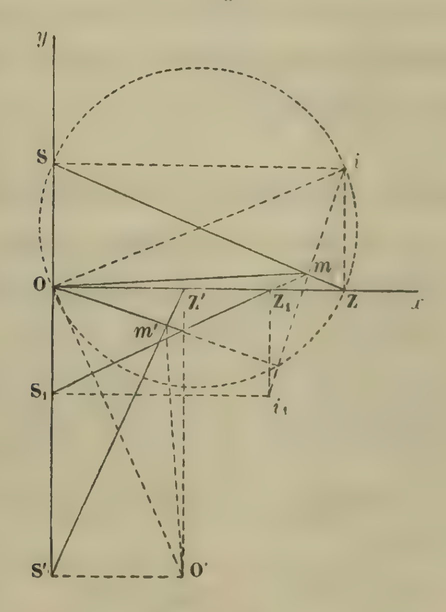
de courbure $a\omega$ et mg' égal et parallèle au rayon de courbure $a'\omega'$: la droite gg' coupe la normale $m\mu$ au centre de courbure demandé.

CONSTRUIRE LES AXES D'UNE ELLIPSE DONT ON DONNE DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Le segment ZS de grandeur constante (*fig.* 1) se déplace de façon que ses extrémités glissent sur les côtés de l'angle droit xOy. Un point m de ZS décrit, comme

Fig. 1.



l'on sait, une ellipse (m) dont les axes sont dirigés suivant Ox, Oy et égaux à mZ, mS. On montre facilement que le déplacement infiniment petit de ZS est une rotation autour du sommet i du rectangle $OZiS$ et, par

suite, que la droite im est la normale en m à l'ellipse (m). Construisons la figure $O'Z'OS'$ égale à $OZiS$ et faisons correspondre les lignes perpendiculaires entre elles. Le point m de ZS est venu en m' sur $Z'S'$ et le segment Om' est égal et perpendiculaire à im.

Le segment Om', perpendiculaire à la normale mi, est alors le demi-diamètre conjugué de Om et mi est égal à ce demi-diamètre.

On a alors la construction suivante :

Étant donnés les demi-diamètres conjugués Om, Om', *on abaisse du point* m *une perpendiculaire sur* Om'. *On porte sur cette perpendiculaire le segment* mi *égal à* Om'. *Sur* Oi *comme diamètre on décrit une circonférence de cercle et l'on mène par* m *le diamètre* ZS *de cette circonférence. Les segments* mZ, mS *sont égaux aux demi-axes cherchés. La droite* OZ, *qui passe par le point* Z, *extrémité du segment* mz *égal au demi petit axe, donne la direction du grand axe de l'ellipse* (m) (¹).

On est conduit à une construction analogue en portant, à partir de m dans le prolongement de im, un segment égal à Om'. Cette construction correspond au cas où l'on considère l'ellipse (m) comme engendrée par le point m du segment Z_1S_1 mobile dans l'angle droit xOy et dont la longueur est égale à la demi-différence des axes de (m). On obtient, pour le point m, la position de ce segment en menant de ce point une parallèle à Oi. On a

$$mS_1 = mS, \qquad mZ_1 = mZ,$$

et, par suite, le segment Z_1S_1 est bien égal à la demi-différence des axes de (m).

(¹) Voir dans le tome XVII, 2ᵉ série, un article de M. A. Mannheim.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1889. — AUTRE SOLUTION;

PAR M. E. MARCHAND,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Caen.

On donne un cercle ayant pour centre le point O *et une parabole* P, *on considère les coniques* C *inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle et à la parabole. Cela posé, on demande de trouver :*

1° *L'enveloppe des polaires* A *du centre* O *par rapport aux coniques* C ;

2° *L'enveloppe des tangentes* δ *aux coniques* C *telles que la normale au point de contact passe par* O; *l'enveloppe des axes des coniques* C; *le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur* A, *sur les tangentes* δ *et sur les axes de* C.

I. L'emploi des coordonnées tangentielles permet de résoudre très simplement la première Partie; mais sans expliquer pourquoi l'on trouve trois fois la même parabole comme enveloppe (l'axe étant perpendiculaire à celui de la parabole donnée P et la directrice passant par O).

La seconde Partie résulte aussitôt de la première. Il suffit d'ouvrir à la page 551 le *Traité de Géométrie analytique*, par M. H. PICQUET, pour constater que, *toute podaire de parabole par rapport à un point* O *de la directrice est une strophoïde dont le point fixe est à l'intersection de la tangente au sommet avec la droite qui joint le point* O *au foyer.*

II. Pourquoi les trois enveloppes coïncident-elles, ou plutôt comment peut-on ramener les trois énoncés à un seul ? Telle est la question à laquelle je tâcherai de répondre en m'appuyant sur les propriétés les plus simples des réseaux de coniques (H. Picquet, p. 524)

$$(1) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0.$$

J'aurai besoin de rappeler quelques théorèmes de Chasles (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V) et je reproduirai rapidement leur démonstration, telle que M. Darboux l'a présentée dans son Cours de 1875 à l'École Normale.

III. Le réseau (1) contient une infinité de faisceaux dont un quelconque est déterminé, comme on le prouve facilement, par

$$(2) \qquad a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 = 0,$$

a_1, a_2, a_3 étant des nombres fixes donnés.

Théorème fondamental. — *Deux faisceaux d'un même réseau ont toujours une conique commune.*

En effet, cela revient à dire que deux équations telles que (2) déterminent toujours un système de valeurs uniques de λ_1, λ_2, λ_3. Le théorème n'a pas de cas d'exception.

Ici l'on prendra un réseau tangentiel (H. Picquet, p. 525)

$$(3) \qquad \mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 = 0,$$

les trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui définissent géométriquement le réseau étant le système des points circulaires I, J, un point double O et une conique quelconque Γ. Si l'on combine ces trois coniques fondamentales deux à

deux, on a les trois faisceaux suivants, qui appartiennent au réseau :

1° Le système des cercles de centre O, c'est-à-dire le faisceau tangentiel déterminé par le point double O et par les points I, J.

2° Le système des coniques homofocales à Γ, déterminé par la conique Γ et les points I, J.

3° Le système des coniques tangentes à Γ aux deux points G, G′ de contact avec les tangentes menées de O, déterminé par Γ et le point double O.

Si donc on considère le faisceau tangentiel ayant pour base deux coniques quelconques du réseau, d'après le théorème fondamental, ce faisceau comprendra un cercle de centre O et une conique homofocale à Γ, cette dernière pouvant se réduire exceptionnellement aux points I, J.

On ne saurait mieux montrer l'intérêt de ces considérations qu'en rappelant comment Chasles en déduit la propriété élémentaire des coniques

$$\rho \pm \rho' = 2a.$$

Soient deux points G, G′ sur une même conique, l'un fixe G, l'autre mobile G′. Il suffit d'établir que la somme ou la différence des rayons vecteurs est la même pour les deux points. Or je mène les tangentes en G et G′ qui concourent en O et je considère le réseau défini par le point double O, la conique donnée Γ et les deux points I, J. Une première conique du réseau est donnée par GG′, puisque GG′ est une conique du faisceau (3°) déterminé par Γ et par O. Une seconde conique du réseau est fournie par les foyers F et F′ de la conique Γ, puisque FF′ est une conique du faisceau (2°) des coniques homofocales à Γ. Les deux coniques GG′ et FF′ ont comme tangentes communes FG, FG′, F′G,

F′G′. Les coniques tangentes à ces quatre droites forment un faisceau du réseau ; ce faisceau doit admettre, d'après le théorème fondamental, un cercle de centre O. Le quadrilatère FF′GG′ est donc circonscriptible à un cercle de sorte que la somme de deux de ses côtés est égale à la somme de deux autres côtés. On verra facilement qu'on peut avoir, soit

$$\rho + \rho' = \rho_1 + \rho'_1,$$

soit

$$\rho' - \rho = \rho'_1 - \rho_1.$$

Si le point G′ se meut d'une manière continue sur la courbe, il est clair que l'on conservera toujours, soit la somme, soit la différence constante ; mais je n'insiste pas sur cette discussion, inutile pour la suite.

IV. Le réseau tangentiel (3) contient une infinité de coniques réduites à deux points G, G′ ; la droite qui joint ces deux points sera appelée par la suite droite double du réseau.

La polaire A du point O par rapport à une conique quelconque C du réseau est la droite qui joint les points de contact G, G′ des tangentes menées de O à C. On vient de voir que GG′ est une des coniques du réseau, appartenant au faisceau OO, C.

Donc A est une droite double du réseau. Réciproquement, sur toute droite double du réseau se trouvent, par définition, deux points G, G′ formant une conique du réseau. On a vu que toutes les coniques tangentes en G et G′ à OG et OG′ forment un faisceau du réseau. D'après le théorème fondamental, tout faisceau de coniques C, compris dans le réseau, comprend une conique tangente à OG, OG′ en G et G′.

Donc : 1° les polaires du point O par rapport aux

coniques C formant un faisceau quelconque du réseau ne sont autre chose que les droites doubles du réseau.

Soit maintenant une conique du réseau admettant une tangente T, telle que la normale au point de contact M passe par O. Je prends comme seconde conique le cercle de centre O et de rayon OM, et, si je circonscris un quadrilatère à ces coniques, il est clair que deux sommets opposés G et G′ seront sur T. Donc T est une droite double du réseau. Réciproquement, si l'on prend une droite double GG′, on peut dans chaque faisceau du réseau trouver une conique tangente à GG′. Je dis que le point de contact est le pied M de la perpendiculaire abaissée de O sur GG′. En effet, si l'on prend le faisceau défini par la conique GG′ et une seconde conique du réseau tangente à GG′, deux des quatre tangentes communes seront venues se confondre, de sorte que la limite de leur intersection soit le point de contact M; or le quadrilatére circonscrit à deux coniques du réseau étant toujours circonscrit à un cercle de centre O, si deux côtés du quadrilatère tendent à se confondre, la limite commune des deux points de contact avec le cercle sera la position limite de l'intersection des deux droites, c'est-à-dire le point M déjà nommé, et l'on sait qu'une tangente à un cercle en M est perpendiculaire au rayon OM.

Alors, 2° les tangentes T aux coniques C d'un faisceau quelconque du réseau, telles que les normales au point de contact passent par le point O, ne sont autre chose que les droites doubles du réseau.

Je ferai remarquer ici que le point M est un des deux points en lesquels se décompose une des coniques du faisceau précédent; il ne diffère nullement des points G et G′, comme on le verrait, en prenant, par exemple, le faisceau défini par le cercle de centre O et de rayon OG

et par les deux points G, G'; le point G occupera par rapport à ce nouveau faisceau la position qu'occupait M tout à l'heure.

Enfin tout axe d'une conique C du réseau contient deux foyers F et F'. Si l'on prend le faisceau formé par C et IJ, on voit que le système de deux points F, F' est une conique du réseau. Donc tout axe est une droite double du réseau. Réciproquement, sur une droite double du réseau on a deux points G, G' formant une conique du réseau. Le faisceau GG', IJ, c'est-à-dire le faisceau de toutes les coniques ayant G et G' comme foyers, appartient au réseau.

D'après le théorème fondamental, dans tout faisceau de coniques C du réseau, il y en aura une admettant G, G' comme foyers et par suite GG' comme axe. Il faut toutefois observer que, si l'on prenait les deux faisceaux formés de coniques homofocales à deux coniques quelconques du réseau, la conique commune se réduirait aux points I, J.

Par suite : 3° les axes des coniques C d'un faisceau quelconque du réseau ne sont autre chose que les droites doubles du réseau.

Remarquons, en terminant, que les points de contact d'une conique du réseau avec sa polaire A, prise par rapport à O (appelés G, G'), ainsi que le point de contact d'une tangente T, telle que la normale passe par O (appelé M), peuvent être considérés comme foyers d'une conique d'un quelconque des faisceaux du réseau qui ne soit pas formé de coniques homofocales.

V. L'application au problème est dès lors évidente. On est ramené dans les trois cas à trouver l'enveloppe des droites doubles du réseau, la cayleyenne du réseau (H. PICQUET, p. 526). Je reviendrai plus tard sur ce

point. Pour l'instant, je remarque que l'énoncé de la première Partie peut être modifié de bien des manières.

Au lieu de considérer le faisceau des courbes C de l'énoncé, je puis prendre un autre faisceau quelconque du réseau, par exemple le faisceau des paraboles homofocales à la parabole donnée P, ou même le faisceau des coniques homofocales à une conique quelconque du réseau. Je suis ramené à cet énoncé d'un problème, traité par Painvin dans sa *Géométrie analytique* (n° 976) :

L'enveloppe des polaires d'un point fixe P *par rapport à un système de coniques homofocales est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à* PO.

O étant le centre des coniques homofocales, si l'on prend le système de paraboles homofocales à P, on voit que l'axe de la nouvelle parabole est perpendiculaire à l'axe de P.

Ceci montre, en passant, que toutes les coniques du réseau ont leurs centres sur une droite, savoir la parallèle à l'axe de la parabole P menée par O.

Comme par tout point du plan passent deux coniques homofocales d'un même système se coupant orthogonalement, on a cet énoncé de Painvin (n° 976) :

Si par un point on mène des tangentes aux coniques d'un système homofocal les normales correspondantes enveloppent une parabole.

Au lieu de détacher du réseau un faisceau de coniques homofocales, on peut en détacher le système des coniques tangentes à deux droites OG, OG′ en deux points donnés G et G′. On voit qu'une parabole est la solution de ce problème (Concours académique de Lyon en 1877) :

Enveloppe des axes des sections coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés.

Il est inutile, après ce qui a été dit (III), de démontrer que tout système de coniques homofocales et tout système de coniques tangentes à deux droites en deux points donnés peuvent être rattachés à un pareil réseau.

Si l'on passe maintenant à la seconde Partie, au lieu de définir le lieu comme podaire d'une parabole, on peut le ramener à ce problème (*Géométrie analytique* de Briot et Bouquet, 6ᵉ édition, p. 352) :

Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux diverses courbes du second degré ayant pour foyers deux points donnés F *et* F'.

Il suffira enfin de citer ce problème proposé en 1861, pour l'admission à l'École Normale :

On donne une conique et un point P *dans son plan. Par ce point on mène une sécante* PAB, *puis, par les points* A *et* B *où elle rencontre la conique, des tangentes qui se coupent en* M. *On abaisse* MK *perpendiculaire sur* PAB. *Trouver :* 1° *le lieu des points* K *qui est le même pour toutes les coniques homofocales ;* 2° *l'enveloppe de la droite* MK.

Nous avons vu aussi que le lieu de la deuxième Partie n'est autre chose que le lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère circonscriptible à un cercle ; ceci, comme on va le voir, montre que la strophoïde obtenue est hessienne d'un certain réseau tangentiel.

VI. Pour terminer, je vais indiquer comment on vérifie que le problème dont on s'occupe ici n'est qu'un cas particulier dont la solution est donnée par la théorie générale des réseaux. Je m'appuierai sur le Livre de

M. H. Picquet (Livre III, Chap. VII, *Propriétés de trois coniques*), où la question générale est traitée d'une manière très remarquable et très utile, comme j'espère le montrer rapidement.

Nous avons ici un réseau tangentiel

$$\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 = 0, \tag{3}$$

et l'on peut prendre

$$\Gamma_1 = w^2,$$
$$\Gamma_2 = u^2 + v^2,$$
$$\Gamma_3 = A u^2 + B v^2 + 2 F v w + 2 G w u + 2 H u v.$$

On fera F ou G nul si l'on veut que la droite, lieu des centres, soit un des axes de coordonnées.

A ce réseau tangentiel correspond un réseau ponctuel corrélatif (*voir* H. Picquet, p. 525, n° 220). Soit

$$C \equiv a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y = 0 \tag{4}$$

une des coniques de ce second réseau. On doit avoir

$$\left\{\begin{aligned} & a(\mu_2 + \mu_3 A) + b(\mu_2 + \mu_3 B) \\ & \quad + c\mu_1 + 2\mu_3(fF + gG + hH) = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Égalant à zéro les coefficients de μ_1, μ_2 et μ_3 dans (5), on a

$$c = 0,$$
$$a + b = 0,$$
$$aA + bB + 2(fF + gG + hH) = 0;$$

donc, pour les coniques cherchées, on a

$$\left\{\begin{aligned} & a(x^2 - y^2) + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y = 0, \\ & a(A - B) + 2(fF + gG + hH) = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Éliminant un des paramètres a, f, g, h entre les deux équations (6) et égalant à zéro les coefficients des

trois autres, on aura trois coniques

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0$$

et le faisceau ponctuel corrélatif de (3)

$$(7) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0.$$

On peut aussi écrire que les coefficients de a, f, g, h sont proportionnels dans les deux équations (6)

$$\frac{x^2 - y^2}{A - B} = \frac{yz}{F} = \frac{zx}{G} = \frac{xy}{H}.$$

On voit que les trois coniques C_1, C_2, C_3, qu'on peut former en égalant ces rapports deux à deux, sont des hyperboles équilatères passant toutes les trois par l'origine O des coordonnées. Or je lis dans l'Ouvrage de M. Picquet (p. 533) :

« Un des cas d'exception est celui où les coniques C_1, C_2, C_3 sont toutes les trois des hyperboles équilatères; alors il en est de même de toutes les coniques du réseau, et elles n'ont en général aucun point commun. Dans ce cas, une couple de points conjugués communs est formée par les points cycliques, et la hessienne du système est le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel dont deux courbes sont les deux autres coniques, qui, avec le couple des points cycliques, définissent le réseau tangentiel; la cayleyenne est l'enveloppe des axes de ces coniques. »

Ici les trois hyperboles équilatères $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ passent par un même point, le point O.

Le lieu demandé dans la première Partie est l'enveloppe des axes ou la cayleyenne; le lieu demandé dans la seconde Partie est le lieu des foyers ou la hessienne. On a d'ailleurs vu que l'on a une infinité de faisceaux

de coniques, tous ceux appartenant au réseau, pour lesquels ces deux lieux seraient les mêmes, ce qui me paraît une généralisation très curieuse de l'énoncé. Les lieux 1° et 2° ne sont pas altérés si l'on remplace le faisceau C de l'énoncé par tout faisceau défini par deux coniques de notre réseau.

La solution dépend ici, non du cas général, c'est-à-dire des énoncés 11 et 12 que donne M. Picquet à la page 535, mais de l'énoncé 9 de la même page :

« Si les coniques d'un réseau ponctuel ont un point commun, la cayleyenne se réduit à ce point et à une conique, et la hessienne a un point double en ce point. »

Resterait à déduire des résultats généraux (énoncés 11 et 12) que l'on a une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui de P et dont la directrice passe par O. Je ne m'en occuperai pas.

Pour terminer, j'applique au réseau tangentiel (3) l'équation générale de la cayleyenne (H. Picquet, p. 528)

$$C = \begin{vmatrix} \Gamma'_{1u} & \Gamma'_{1v} & \Gamma'_{1w} \\ \Gamma'_{2u} & \Gamma'_{2v} & \Gamma'_{2w} \\ \Gamma'_{3u} & \Gamma'_{3v} & \Gamma'_{3w} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & w \\ u & v & 0 \\ \Gamma'_u & \Gamma'_v & \Gamma'_w \end{vmatrix} = 0.$$

On a $w = 0$, c'est-à-dire l'origine O, et la parabole

$$u\Gamma'_v - v\Gamma'_u = 0.$$

C'est bien ce que donne le calcul direct. Je laisse de côté le calcul de la hessienne, qui ne présente d'ailleurs pas plus de difficultés (H. Picquet, p. 527 et p. 528).

Si l'on partait du réseau ponctuel corrélatif (7) d'hyperboles équilatères, on aurait encore d'autres énoncés conduisant toujours à la parabole enveloppe du n° I, à la strophoïde podaire du n° II. On sait, par exemple (H. Picquet, p. 526), que les droites appelées A, T dans l'énoncé seront l'une des deux droites auxquelles peut se réduire une conique décomposable du faisceau ponctuel (7). De même les points que j'appelais G, G′ ou M sont l'intersection de deux droites auxquelles peut se réduire une conique décomposable du faisceau (7). La question est donc loin d'être épuisée.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1888;

Par M. Gambey,
Professeur au lycée de Rouen.

I. — Mathématiques élémentaires.

Soient deux points A *et* A′ *et deux droites* D *et* D′, *parallèles à* AA′ *et équidistantes de cette droite :*

1° *Démontrer qu'à tout point* P, *pris sur la droite* D, *correspond un point* P′, *pris sur* D′, *tel que la droite* PP′ *soit tangente aux cercles* S *et* S′ *circonscrits l'un au triangle* PAA′, *l'autre au triangle* P′AA′ ;

2° *Trouver le lieu décrit par la projection de chacun des points* A *et* A′ *sur la droite* PP′;

3° *Construire les droites* PP′ *qui passent par un point donné* Q;

4° *Démontrer que les cercles* S *et* S′ *se coupent sous un angle constant ;*

5° *Soit* O *le milieu du segment* AA′; *étudier les variations de l'angle* $\widehat{POP'}$.

1° Soit C le centre du cercle déterminé par les trois points A, A′, P : une perpendiculaire élevée en P sur CP détermine la tangente au cercle C; cette droite coupe AA′ en I et la droite D′ en P′.

De $\overline{IA}.\overline{IA'} = \overline{IP}^2$, on tire $\overline{IA}.\overline{IA'} = \overline{IP'}^2$, à cause de IP = IP′; donc PP′ est tangente au cercle de centre C′ qui passe par les trois points A, A′, P′.

2° Projetons A et A′ en H et H′ sur PP′; le point P en K sur AA′; traçons A′H, et remarquons que la projection de A′H sur AH est égale à A′H′ (le point A′ est supposé entre le point A et la droite PP′). Les triangles semblables AIH, A′IH′, PIK donnent

$$\frac{AH}{AI} = \frac{A'H'}{A'I} = \frac{PK}{PI};$$

d'où l'on tire

$$\frac{AH.A'H'}{AI.A'I} = \frac{\overline{PK}^2}{\overline{PI}^2},$$

et, comme les dénominateurs sont égaux, il en est de même des numérateurs; donc le produit $\overline{AH}.\overline{A'H'}$ est constant et égal au carré de la demi-distance des parallèles D et D′.

Ceci obtenu, le triangle AA′H donnant l'égalité

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{A'H}^2 - 2\overline{AH}.\overline{A'H'},$$

on en conclut que la somme $\overline{AH}^2 + \overline{A'H}^2$ est aussi constante.

Le lieu géométrique de H est donc une circonférence

qui a le point milieu O de AA′ pour centre. Le point H′ décrit le même lieu. Le rayon de ce cercle a pour valeur

$$\sqrt{\frac{\overline{AA'}^2}{4} - \overline{PK}^2}.$$

Remarque. — De ce qui précède, on conclut que la droite PP′ est constamment tangente à une ellipse qui a pour foyers les points A et A′, et dont le cercle précédent est le cercle principal, ce qui suffit à la déterminer. Elle est tangente aux droites D et D′.

3° La construction des droites PP′ qui passent par un point donné Q revient à mener par ce point des tangentes à l'ellipse que nous venons de considérer ; ou bien à joindre le point Q aux points d'intersection du cercle principal de cette ellipse avec la circonférence qui aurait AQ ou A′Q pour diamètre. Le problème est donc impossible quand le point Q est situé à l'intérieur de l'ellipse.

4° Soient B et B′ les points où les droites D et D′ sont coupées par leur perpendiculaire commune menée par le milieu de AA′. Traçons AC, AC′, AB, AB′. Si l'on prend BC et B′C′ pour bases des triangles ABC, AB′C′, ces triangles auront même hauteur et seront proportionnels à BC, B′C′. Mais les triangles semblables BCP, B′C′P′ donnent

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CP}{C'P'} = \frac{CA}{C'A} = \frac{\overline{CA} \times \overline{AB}}{\overline{C'A} \times \overline{AB'}},$$

car

$$AB = AB'.$$

On a donc

$$\frac{\text{triangle ABC}}{\text{triangle AB}'\text{C}'} = \frac{\overline{CA} \times AB}{\overline{C'A} \times AB'}.$$

ce qui exige que les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ soient égaux ou supplémentaires. Or ils sont évidemment aigus tous les deux, donc ils sont égaux.

Il en résulte que les angles $\widehat{CAC'}$ et $\widehat{BAB'}$ sont aussi égaux. Donc les cercles de centres C et C' se coupent sous un angle constant, qui est le supplément de l'angle $\widehat{BAB'}$.

5° Traçons enfin OP et OP'. La double symétrie de l'ellipse à laquelle la droite PP' doit rester tangente montre qu'il suffit d'étudier la variation de l'angle $\widehat{POP'}$, de la valeur qu'il a quand la droite PP' est perpendiculaire à AA', à celle qu'il prend quand cette droite devient parallèle à AA', tout en restant toujours tangente à l'ellipse. La demi-valeur initiale de cet angle étant toujours moindre que 45°, l'angle $\widehat{POP'}$ part d'une valeur moindre que 90°, et il varie d'une manière continue de cette valeur à 90°, valeur qu'il prend quand OP a la direction AA', et OP' la direction perpendiculaire, car alors l'un des cercles qui passent en A et en A' se réduit à la droite AA' prolongée indéfiniment.

La même question a été résolue par M. G. Leinckugel, élève du lycée de Douai, et par M. G.-H. Niewenglowski, élève de Mathématiques élémentaires au lycée Louis-le-Grand (classe de M. Humbert).

II. — Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde S *et deux points* P *et* P', *et l'on considère les ellipses* C *et* C' *suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des points* P *et* P' :

1° *Démontrer que les coniques* C *et* C' *et les points*

P et P′ sont situés sur une quadrique Σ qui est en général unique;

2° *Discuter cette quadrique en supposant que le point P′ se déplace dans l'espace, le point P et l'ellipsoïde S restant fixes;*

3° *Les points P et P′ étant supposés fixes et situés de façon que la quadrique Σ soit indéterminée, trouver le lieu du centre de cette quadrique;*

4° *En supposant que les points P et P′ se déplacent de façon que la quadrique Σ soit une sphère, trouver la surface enveloppe E de cette sphère;*

5° *Peut-on déterminer un point A tel que la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface E, en prenant le point A pour pôle, soit un cône du second degré?*

1° Soit l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes

$$(S) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

$P(\alpha, \beta, \gamma)$ et $P'(\alpha', \beta', \gamma')$ étant les deux points donnés, leurs plans polaires ont pour équations

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1=0, \qquad \frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}+\frac{\gamma' z}{c^2}-1=0,$$

et toute quadrique passant par les points P et P′ et par les coniques, intersections de l'ellipsoïde S et des plans polaires des points P et P′, a une équation de la forme

$$(A)\quad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right) \\ \quad +\left(\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}+\dfrac{\gamma z}{c^2}-1\right)\left(\dfrac{\alpha' x}{a^2}+\dfrac{\beta' y}{b^2}+\dfrac{\gamma' z}{c^2}-1\right)=0. \end{cases}$$

à laquelle il faut joindre les deux conditions

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}-1\right) \\ \quad +\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left(\dfrac{\alpha\alpha'}{a^2}+\dfrac{\beta\beta'}{b^2}+\dfrac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)=0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{\alpha'^2}{a^2}+\dfrac{\beta'^2}{b^2}+\dfrac{\gamma'^2}{c^2}-1\right) \\ \quad +\left(\dfrac{\alpha\alpha'}{a^2}+\dfrac{\beta\beta'}{b^2}+\dfrac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\left(\dfrac{\alpha'^2}{a^2}+\dfrac{\beta'^2}{b^2}+\dfrac{\gamma'^2}{c^2}-1\right)=0. \end{cases}$$

Supposons d'abord que les deux points P et P′ ne soient pas situés sur l'ellipsoïde donné. Alors on pourra diviser l'équation (1) par $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1$, et l'équation (2) par $\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\gamma'^2}{c^2}-1$, et ces deux équations se réduiront à l'équation unique

$$\lambda+\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1=0,$$

qui détermine une seule valeur de λ. L'équation (A) devient alors

$$(B)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha\alpha'}{a^2}+\dfrac{\beta\beta'}{b^2}+\dfrac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right) \\ \quad -\left(\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}+\dfrac{\gamma z}{c^2}-1\right)\left(\dfrac{\alpha' x}{a^2}+\dfrac{\beta' y}{b^2}+\dfrac{\gamma' z}{c^2}-1\right)=0. \end{cases}$$

Si l'un des points P ou P′ est situé sur l'ellipsoïde donné, l'une des équations (1) et (2) est vérifiée identiquement et l'autre donne la même valeur de λ, déjà obtenue.

Mais si les deux points P et P′ sont tous les deux situés sur l'ellipsoïde donné, les équations (1) et (2) sont vérifiées identiquement, quel que soit λ : il y a donc, dans ce cas, une infinité de quadriques répondant à la

question, tandis qu'il n'y en a qu'une seule dans les deux autres cas.

2° Pour discuter plus commodément l'équation (B), je rapporte momentanément l'ellipsoïde S à trois diamètres conjugués dont l'un, l'axe des z, passe au point P. Appelant a', b', c' les trois demi-diamètres conjugués, l'équation à écrire se déduira de l'équation (B), en faisant $\alpha = \beta = 0$, et supposant que α', β', γ' et γ soient les nouvelles coordonnées des points P' et P. Ce sera donc

$$(\mathrm{B})' \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\gamma\gamma'}{c'^2} - 1\right)\left(\dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} + \dfrac{z^2}{c'^2} - 1\right) \\ \quad - \left(\dfrac{\gamma z}{c'^2} - 1\right)\left(\dfrac{\alpha' x}{a'^2} + \dfrac{\beta' y}{b'^2} + \dfrac{\gamma' z}{c'^2} - 1\right) = 0. \end{array} \right.$$

Je suppose les points P et P' non situés sur l'ellipsoïde et, par suite, qu'il n'y a qu'une quadrique Σ satisfaisant aux conditions énoncées.

Toutes les quadriques qu'on obtient en faisant varier seulement le point P' ont une direction commune de diamètres conjugués; c'est la direction de l'axe des z, et les équations de ce diamètre, pour une quadrique déterminée, sont données en égalant à zéro les dérivées du premier membre de (B)' par rapport à x et à y.

On obtient ainsi

$$2(\gamma\gamma' - c'^2)x - (\gamma z - c'^2)\alpha' = 0,$$
$$2(\gamma\gamma' - c'^2)y - (\gamma z - c'^2)\beta' = 0;$$

d'où

$$x = \frac{\gamma z - c'^2}{2(\gamma\gamma' - c'^2)}\alpha', \qquad y = \frac{\gamma z - c'^2}{2(\gamma\gamma' - c'^2)}\beta'.$$

Ces valeurs de x et de y substituées dans l'équation (B)' conduisent, pour déterminer les z des points d'intersection de la quadrique avec son diamètre parallèle

à Oz, à l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma^2\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{4(\gamma\gamma'-c'^2)}{\gamma^2}\right]z^2\\ &\quad-2c'^2\gamma\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{2(\gamma\gamma'-c'^2)(\gamma+\gamma')}{c'^2\gamma}\right]z\\ &\qquad+c'^4\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{4(\gamma\gamma'-c'^2)}{c'^4}\gamma\gamma'\right]=0.\end{aligned}\right.$$

En écartant le cas de $\gamma\gamma'-c'^2=0$, qui donnerait pour la quadrique Σ deux plans, ceux des coniques C et C′, on peut écrire ainsi la condition de réalité des racines de l'équation (3)

$$(4)\qquad (c'^2-\gamma^2)\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{(\gamma'-\gamma)^2}{c'^2-\gamma^2}\right]\geqq 0.$$

Si l'on regarde α', β', γ' comme des coordonnées courantes, les équations

$$H=\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{(\gamma'-\gamma)^2}{c'^2-\gamma^2}=0,$$

$$K=\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{4(\gamma\gamma'-c'^2)}{\gamma^2}=0$$

représentent : la première, un cône circonscrit à l'ellipsoïde donné suivant la conique C et ayant le point P pour sommet; la seconde, un paraboloïde elliptique tangent au plan de la conique C au point où ce plan est percé par l'axe des z, et inscrit dans le cône H suivant la courbe déterminée sur ce cône par le plan

$$(2\gamma^2-c'^2)\gamma'-c'^2\gamma=0.$$

Cela posé, distinguons deux cas.

I. — *Le point* P *est extérieur à l'ellipsoïde donné.*

On a alors

$$c'^2-\gamma^2<0.$$

La condition (4) montre que, si le point P′ est à l'exté-

rieur du cône H, l'équation (3) aura ses racines imaginaires, et par conséquent la quadrique Σ sera un *hyperboloïde à une nappe*. Si le point P est sur le cône H, les racines de (3) sont égales et Σ représente un cône. Mais si le point P′ est à l'intérieur du cône H, l'équation (3) aura ses racines réelles et distinctes. Il faudra alors examiner si ces racines sont toutes les deux supérieures ou inférieures à $\frac{c'^2}{\gamma}$, ou bien si elles comprennent entre elles cette quantité.

Or la substitution à z, dans l'équation (3), de $\frac{c'^2}{\gamma_1}$, conduit à l'expression

$$\frac{4(\gamma_1\gamma'_1 - c'^2)}{\gamma_1^2}(\gamma_1^2 - c'^2),$$

qui est positive. Donc, si le point P′ est situé à l'intérieur du paraboloïde K, la quantité $\frac{c'^2}{\gamma_1}$ sera comprise entre les racines de (3), et la quadrique Σ sera un *ellipsoïde réel*, tandis que, si le point P′ est extérieur au même paraboloïde, $\frac{c^{2\prime}}{\gamma_1}$ sera extérieure aux racines de (3) et Σ sera un *hyperboloïde à deux nappes*.

Si le point P′ vient sur le paraboloïde K, l'équation (3) acquiert une racine infinie, et Σ devient un *paraboloïde elliptique*.

II. — *Le point* P *est intérieur à l'ellipsoïde donné*.

Alors on a

$$c'^2 - \gamma_1^2 > 0;$$

les racines de (3) sont toujours réelles et distinctes. La discussion est analogue à la précédente. Ainsi la substitution de $\frac{c'^2}{\gamma_1}$ à la variable z dans (3) donnant ici

un résultat négatif, si le point P' est intérieur au paraboloïde K (qui n'est pas le même que dans le cas précédent), Σ sera un *hyperboloïde à deux nappes,* et si ce point est extérieur à K, la quadrique Σ sera un *ellipsoïde réel.* Ce sera encore un *paraboloïde elliptique* si le point P' est situé sur K.

Les cas particuliers se discutent facilement.

3° Je conserve encore le même système d'axes, sauf que je suppose que le plan des zx contient le point P', d'où $\beta' = 0$.

La quadrique Σ est indéterminée, avons-nous dit, quand les deux points P et P' sont situés sur l'ellipsoïde donné. On doit donc supposer ici

$$(5) \qquad \gamma = c' \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha'^2}{a'^2} + \frac{\gamma'^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

et l'équation générale des quadriques Σ sera

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1\right) + \frac{z - c'}{c'}\left(\frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1\right) = 0.$$

En égalant à zéro les dérivées du premier membre de cette équation par rapport à x, y et z, on obtient

$$\frac{2\lambda x}{a'^2} + \frac{z - c'}{c'}\,\frac{\alpha'}{a'^2} = 0,$$

$$\frac{2\lambda y}{b'^2} = 0,$$

$$\frac{2\lambda z}{c'} + \frac{z - c'}{c'}\,\frac{\gamma'}{c'} + \frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1 = 0.$$

et, pour toute valeur de λ différente de zéro, on voit que le lieu cherché est tout entier dans le plan des zx.

En éliminant λ, on arrive à l'équation

$$\frac{c'^2}{a'^2}\alpha' x^2 - \alpha' z^2 + 2\gamma' zx - c'(\gamma' + c)x + c'\alpha' z = 0.$$

Si l'on multiplie par α' et si l'on remplace $\frac{\alpha'^2}{a'^2}$ par $1 - \frac{\gamma'^2}{c'^2}$, on peut la mettre sous la forme

$$[(c'+\gamma')x - \alpha' z][(c'-\gamma')x + \alpha' z - c'\alpha'] = 0;$$

et elle représente la droite qui joint l'origine au milieu du segment PP', et la droite PP' elle-même.

Remarque. — Les quadriques Σ sont toutes tangentes aux deux plans

$$z - c' = 0, \qquad \frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1 = 0,$$

aux points P et P' de l'ellipsoïde donné. Parmi ces quadriques se trouve évidemment l'ellipsoïde S; donc l'origine devait faire partie du lieu obtenu. L'ensemble des deux plans tangents en P et P' à l'ellipsoïde constituant une variété des quadriques Σ, on doit trouver leur intersection comme faisant partie du lieu. Mais, comme cette variété ne peut s'obtenir qu'en faisant $\lambda = 0$, dans l'équation générale des quadriques Σ, on ne pouvait pas trouver cette partie du lieu par la méthode précédente. Il faut faire $\lambda = 0$ dans les trois équations du centre. Alors on n'a plus nécessairement $y = 0$, et l'on obtient en effet les deux équations

$$z - c' = 0, \qquad \frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1 = 0,$$

qui déterminent l'intersection cherchée.

4° Je reprends les coordonnées rectangulaires, et, par suite, l'équation (B), obtenue en supposant que les points P et P' ne soient situés ni l'un ni l'autre sur l'ellipsoïde S.

Cette équation développée devient

$$\left(\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{y^2}{b^2}$$
$$+\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}-1\right)\frac{z^2}{c^2}$$
$$-\frac{\beta\gamma'+\gamma\beta'}{b^2c^2}yz-\frac{\alpha\gamma'+\gamma\alpha'}{c^2a^2}zx-\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{a^2b^2}xy$$
$$+\frac{\alpha+\alpha'}{a^2}x+\frac{\beta+\beta'}{b^2}y+\frac{\gamma+\gamma'}{c^2}z-\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}\right)=0.$$

Elle représentera une sphère si l'on a

$$\left(\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{1}{a^2}=\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{1}{b^2}$$
$$=\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}-1\right)\frac{1}{c^2};$$
$$\beta\gamma'+\gamma\beta'=\alpha\gamma'+\gamma\alpha'=\alpha\beta'+\beta\alpha'=0.$$

Supposons que l'on ait $a>b>c$. Il faudra faire $\beta=\beta'=0$, ce qui est, du reste, tout indiqué par ce fait que les ellipses C et C' devront être des cercles.

On obtient facilement les expressions de α', γ' et γ en fonction de α, et l'on a

$$\alpha'=\frac{a^2n^2}{\alpha(a^2+c^2-b^2)},\qquad \gamma=\frac{lc}{an}\alpha,\qquad \gamma'=\frac{-acln}{\alpha(a^2+c^2-b^2)},$$

en posant, pour abréger,

$$b^2-c^2=l^2,\qquad a^2-c^2=m^2,\qquad a^2-b^2=n^2,$$

et en remarquant que ces différences sont toutes positives.

L'équation de la sphère devient alors

$$na^2c(x^2+y^2+z^2)-nc[(a^2+c^2-b^2)\alpha^2+n^2a^2]x$$
$$-al[(a^2+c^2-b^2)\alpha^2-n^2a^2]z$$
$$+na^2c(n^2-l^2)\alpha=0;$$

et, en ordonnant par rapport à α,

$$(a^2+c^2-b^2)(ncx+alz)\alpha^2 \\ -na^2c(x^2+y^2+z^2+n^2-l^2)\alpha \\ +a^2n^2(ncx-alz)=0.$$

En exprimant que cette équation en α a ses racines égales, on aura l'enveloppe cherchée. On obtient ainsi

$$(\mathrm{E})\quad \left\{ \begin{array}{l} a^2c^2(x^2+y^2+z^2+n^2-l^2)^2 \\ \quad -4(a^2+c^2-b^2)(c^2n^2x^2-a^2l^2z^2)=0. \end{array} \right.$$

Cette enveloppe est donc une surface du quatrième ordre qui admet le cercle de l'infini pour ligne double; c'est une des *anallagmatiques* de M. Moutard, c'est-à-dire une de ces surfaces qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation par rayons vecteurs réciproques convenablement choisie, et l'on sait qu'elles possèdent cette propriété par rapport à cinq pôles différents. C'est aussi une des surfaces étudiées sous le nom de *cyclides*, par M. Darboux, dans son Mémoire *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*.

5° Proposons-nous de trouver un pôle tel que la transformée de (E) par rayons vecteurs réciproques soit un cône du second degré. Les formules de transformation sont

$$x=\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{X},\qquad y=\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{Y},\qquad z=\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{Z};$$

$$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2=\mathrm{R}^2,\qquad x^2+y^2+z^2=r^2;\qquad \mathrm{R}r=\mathrm{K}^2.$$

Portons l'origine des coordonnées au point $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$; l'équation (E) deviendra

$$a^2c^2[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2+n^2-l^2]^2 \\ -4(a^2+c^2-b^2)[n^2c^2(x+x_0)^2-a^2l^2(z+z_0)^2]=0.$$

Développant et employant les formules ci-dessus,

cette équation devient

$$
\begin{aligned}
& a^2c^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2+n^2-l^2)^2 \\
& -4(a^2+c^2-b^2)(n^2c^2x_0^2-a^2l^2z_0^2)](X^2+Y^2+Z^2)^2 \\
& +4K^2[a^2c^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2+n^2-l^2)(x_0X+y_0Y+z_0Z) \\
& \qquad +2(a^2+c^2-b^2)(n^2c^2x_0X-a^2l^2z_0Z)](X^2+Y^2+Z^2) \\
& +2a^2c^2K^4(x_0^2+y_0^2+z_0^2+n^2-l^2)(X^2+Y^2+Z^2) \\
& +a^2c^2K^4(2x_0X+2y_0Y+2z_0Z+K^2)^2 \\
& \qquad -4K^4(a^2c^2-b^2)(n^2c^2X^2-a^2l^2Z^2)=0.
\end{aligned}
$$

On aperçoit facilement la solution

$$x_0=0, \qquad z_0=0, \qquad y_0^2+n^2-l^2=0.$$

Elle ne sera réelle que si l'on a

$$l^2 > n^2,$$

c'est-à-dire

$$2b^2 > a^2+c^2.$$

L'équation précédente se réduit alors à

$$
\begin{aligned}
& 4(a^2+c^2-b^2)(n^2c^2X^2-a^2l^2Z^2) \\
& \qquad -a^2c^2(K^2 \pm 2\sqrt{l^2-n^2}\,Y)^2=0
\end{aligned}
$$

et représente bien un cône du second degré, dont le sommet est au point ayant pour coordonnées

$$0, \quad \frac{\pm K^2}{2\sqrt{l^2-n^2}} \quad \text{et} \quad 0.$$

Il y a même deux solutions, symétriques par rapport au plan des zx.

III. — Analyse et applications.

Théorie. — *Démontrer que, si l'aire d'une portion continue de surface Σ limitée par un contour fermé et donné est la plus petite possible, la somme des rayons de courbure principaux est nulle aux divers points de la portion de surface considérée.*

Définition des surfaces minima. Intégration de leur

équation aux dérivées partielles. Formules de Monge. Formules de M. Weierstrass.

Application. — 1° *Trouver la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique la cycloïde définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = a(v - \sin v),$$
$$y = a(1 - \cos v),$$
$$z = 0.$$

2° *Indiquer la forme de la surface ; montrer que le plan des xy est un plan de symétrie et que les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement sont des axes de symétrie de cette surface ;*

3° *Montrer que la surface peut être coupée par une infinité de plans suivant des paraboles du second degré ;*

4° *Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Demontrer qu'un plan, perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs de cette courbe, coupe la surface suivant une ligne de courbure.*

Pour la théorie, voir l'Ouvrage de M. Darboux : *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Voici la solution du problème donné comme application.

Les formules de M. Weierstrass sont

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,F(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1 - u_1^2)\,F_1(u_1)\,du_1,$$

$$y = \frac{i}{2}\int (1 + u^2)\,F(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1 + u_1^2)\,F_1(u_1)\,du_1,$$

$$z = \int u\,F(u)\,du + \int u_1\,F_1(u_1)\,du_1.$$

et l'on sait que, pour qu'elles représentent une surface réelle, il faut que les variables u et u_1 soient imaginaires conjuguées ainsi que les fonctions $F(u)$ et $F_1(u_1)$. De plus, les intégrations doivent s'effectuer suivant des chemins imaginaires conjugués.

Cela posé, les quantités u, u_1, $F(u)$, $F_1(u_1)$ deviennent, pour un point quelconque de la cycloïde donnée, des fonctions de la variable réelle v, et, pour exprimer que la cycloïde est une ligne géodésique de la surface inconnue, il faut écrire que la normale à cette surface en un point quelconque de la cycloïde est contenue dans le plan des xy. Or les cosinus des angles que fait cette normale avec les axes sont proportionnels aux binômes

$$u + u_1, \quad u_1 - u \quad \text{et} \quad uu_1 - 1.$$

On doit donc poser $uu_1 - 1 = 0$; d'où

$$u_1 = \frac{1}{u}, \qquad \frac{du_1}{dv} = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{dv}.$$

Substituons à u_1 la valeur $\frac{1}{u}$ dans les formules de Weierstrass, et identifions, pour un point de la cycloïde, avec les équations de cette courbe ; puis différentions les équations ainsi formées. Nous aurons

$$(1 - u^2)\frac{du}{dv}\left[F(u) + \frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 2a(1 - \cos v),$$

$$i(1 + u^2)\frac{du}{dv}\left[F(u) + \frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 2a\sin v,$$

$$\frac{du}{dv}\left[F(u) - \frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right) = F(u),$$

$$(1 - u^2)F(u)\frac{du}{dv} = a(1 - \cos v),$$

et

$$i(1 - u^2)F(u)\frac{du}{dv} = a\sin v.$$

$$F(u)\frac{du}{dv} = \frac{a(1 - \cos v)}{1 - u^2} = -i\frac{a\sin v}{1 - u^2}.$$

L'égalité formée par les deux derniers rapports, nécessaire pour que les équations précédentes soient compatibles, détermine u en fonction de v. On en tire

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = -i\frac{1 - u^2}{1 + u^2};$$

puis

$$u^2 = \frac{\cos\frac{v}{2} - i\sin\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2} + i\sin\frac{v}{2}} = e^{-vi};$$

d'où

$$2\log u = -vi, \qquad 2\frac{du}{u} = -i\,dv, \qquad dv = 2i\frac{du}{u}.$$

D'autre part, on trouve facilement

$$1 - \cos v = 2\sin^2\frac{v}{2} = -\frac{(1 - u^2)^2}{2u^2}.$$

L'équation

$$F(u)\frac{du}{dv} = a\frac{(1 - \cos v)}{1 - u^2}$$

devient alors

$$F(u) = -i\frac{a(1 - u^2)}{u^3}.$$

La fonction $F(u)$ étant déterminée, la fonction $F_1(u_1)$ l'est par cela même, puisqu'elle doit être imaginaire conjuguée de $F(u)$.

Elle est du reste inutile, et l'on a, pour les équations

différentielles de la surface cherchée,

$$x = -aRi\int \frac{(1-u^2)^2}{u^3}\,du,$$

$$y = aR\int \frac{1-u^4}{u^3}\,du,$$

$$z = -2aRi\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du,$$

R désignant la partie réelle de la fonction devant laquelle cette lettre est placée. L'intégration donne

$$x = -\frac{a}{2}Ri\left[u^2 - \frac{1}{u^2} - 4\log u\right] + C,$$

$$y = \frac{a}{2}R\left[u^2 + \frac{1}{u^2}\right] + C',$$

$$z = 2aRi\left[u + \frac{1}{u}\right] + C'',$$

C, C′, C″ étant des constantes réelles. Posons

$$u = e^{\frac{\alpha-\beta i}{2}},$$

α et β étant des quantités réelles. Les équations précédentes deviendront

$$x = \frac{a}{2}R\,[-ie^{\alpha}(\cos\beta - i\sin\beta) + ie^{-\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) + 2i(\alpha - \beta i)] + C,$$

$$y = -\frac{a}{2}R\,[e^{\alpha}(\cos\beta - i\sin\beta) + e^{-\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)] + C',$$

$$z = 2aR\left[ie^{\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}\right) + ie^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2} + i\sin\frac{\beta}{2}\right)\right] + C''.$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x = a\left(\beta - \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\sin\beta\right) + C,$$

$$y = -a\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\cos\beta + C',$$

$$z = 2a\sin\frac{\beta}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) + C''.$$

Remplaçons α par u, β par v, u et v étant des variables réelles ; puis déterminons les constantes de manière que, pour $u = 0$, on obtienne les équations de la cycloïde proposée, nous aurons définitivement

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} x = a\left(v - \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2}\sin v\right), \\ y = a\left(1 - \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2}\cos v\right), \\ z = 2a\left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)\sin\dfrac{v}{2}. \end{cases}$$

Telles sont les équations qui déterminent la surface cherchée.

Discussion. — Remarquant que l'on a

$$e^{u} + e^{-u} = \left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)^2 + 2,$$

on élimine facilement u entre les équations (C) ; et l'on peut alors regarder la surface comme engendrée, soit par la parabole variable définie par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} z^2 - 8a^2\sin^2\dfrac{v}{2}\left(\dfrac{a - y}{a\cos v} - 1\right) = 0, \\ \dfrac{(a - y)\sin v}{\cos v} + x - av = 0 ; \end{cases}$$

soit par celle qui est définie par

$$(2)\quad \begin{cases} z^2 - 8a^2 \sin^2 \frac{v}{2} \left(\frac{av - x}{a \sin v} - 1 \right) = 0, \\ \frac{av - x}{\sin v} \cos v + y - a = 0. \end{cases}$$

Ces deux paraboles sont identiques pour une valeur donnée de v; on emploiera les équations (1) pour les valeurs de v qui annulent $\sin v$, et (2) pour celles qui annulent $\cos v$.

Ces équations montrent que la surface que nous étudions est coupée par une infinité de plans suivant une parabole. Cette parabole a son plan constamment parallèle à l'axe des z, et son axe dans le plan des xy. Son sommet décrit la cycloïde donnée, comme on le constate facilement, et, pour les valeurs de v égales à

$$\frac{\pi}{2} - v_0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + v_0 \qquad \left(v_0 < \frac{\pi}{2} \right),$$

les paramètres de ces paraboles sont les mêmes; elles sont symétriquement placées par rapport au plan $x = a\pi$.

Les plus remarquables de ces paraboles sont données par les valeurs de v égales à 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

Pour $v = 0$ et pour $v = 2\pi$, on obtient par (1) l'axe des y et sa parallèle menée par le point $x = 2a\pi$, $y = 0$, $z = 0$. Ce sont les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement. Ces tangentes sont donc situées sur la surface. Pour $v = \frac{\pi}{2}$ et pour $v = \frac{3\pi}{2}$, les équations (2) donnent les deux paraboles égales

$$(3)\qquad y = a, \qquad z^2 + 4ax - 2a^2(\pi - 2) = 0,$$

$$(4)\qquad y = a, \qquad z^2 - 4ax + 2a^2(2 + 3\pi) = 0.$$

situées toutes deux dans le plan $y - a = 0$, mais orientées en sens contraire.

Enfin, pour $v = \pi$, les équations (1) donnent la parabole

$$x = a\pi, \qquad z^2 - 8ay + 16a^2 = 0,$$

située dans le plan $x - a\pi = 0$, perpendiculaire à la base de la cycloïde, en son milieu. C'est la parabole de paramètre maximum.

En général, pour

$$v = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

on a, si k est pair, la parabole

$$y - a = 0, \qquad z^2 + 4ax - 2a^2[(2k+1)\pi - 2] = 0;$$

et si k est impair, la parabole

$$y - a = 0, \qquad z^2 - 4ax + 2a^2[(2k+1)\pi + 2] = 0.$$

Le mode de génération qui vient d'être étudié indique d'une manière assez exacte la forme de la surface.

En donnant à u et à v d'abord les valeurs u_0 et v_0, puis les valeurs $u = -u_0$, $v = v_0$, les formules (C) donnent les mêmes valeurs de x et de y; celles de z sont égales et de signes contraires ; ce qui prouve que les points $M(u_0, v_0)$, $M'(-u_0, v_0)$ sont symétriques par rapport au plan des xy. Ce plan est donc un plan de symétrie de la surface.

Si l'on fait $u = u_0$, $v = v_0$, puis $u = u_0$, $v = -v_0$, les mêmes formules donnent les mêmes valeurs pour x et pour z ; mais les valeurs de y sont égales et de signes contraires. Les points $M(u_0, v_0)$, $M'(u_0, -v_0)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des y. Cette droite est donc un axe de symétrie de la surface. On ferait voir de la même manière que la tangente au point de rebroussement $x = 2k\pi a$, $y = 0$, $z = 0$ est aussi un axe

de symétrie de la surface. Il suffirait pour cela de donner à u et à v les deux couples de valeurs

$$u_0, \qquad v_0 + 2k\pi,$$
$$u_0, \qquad -v_0 + 2k\pi.$$

Équation différentielle des lignes de courbure de la surface. — Les cosinus directeurs de la normale à la surface au point (x, y, z) étant proportionnels aux binômes

$$u_1 + u, \qquad i(u_1 - u), \qquad uu_1 - 1,$$

les équations de cette normale peuvent s'écrire

$$X = x + (u_1 + u)\lambda,$$
$$Y = y + i(u_1 - u)\lambda,$$
$$Z = z + (uu_1 - 1)\lambda.$$

Exprimons qu'il existe sur la surface un déplacement tel que le point (X, Y, Z) de la normale décrive une courbe tangente à cette normale. Nous devrons écrire

$$\frac{dX}{u_1 + u} = \frac{dY}{i(u_1 - u)} = \frac{dZ}{uu_1 - 1};$$

ce qui se ramène aisément à

$$\begin{vmatrix} dx & du_1 + du & u_1 + u \\ dy & i(du_1 - du) & i(u_1 - u) \\ dz & u\,du_1 + u_1\,du & uu_1 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En substituant dans cette équation les valeurs de dx, dy, dz qu'on tire des formules de M. Weierstrass et en effectuant les calculs et les réductions, on arrive à l'équation bien simple

$$(\text{D}) \qquad F(u)\,du^2 - F_1(u_1)\,du_1^2 = 0,$$

après suppression du facteur $2(1 + uu_1)^2$.

Mais on a trouvé plus haut

$$F(u) = -ai\,\frac{1-u^2}{u^3};$$

les équations cherchées seront donc

$$R\int\sqrt{\frac{1-u^2}{u^3}}\,du = \text{const.},$$
$$Ri\int\sqrt{\frac{1-u^2}{u^3}}\,du = \text{const.}$$

Mais on peut tirer directement ces équations des formules (C), indépendamment de toute quantité imaginaire. On obtient ainsi

$$(\mathrm{E})\quad \left\{ \begin{aligned} &(e^u - e^{-u})\cos\frac{v}{2}\,du^2 - 2(e^u + e^{-u} + 2)\sin\frac{v}{2}\,du\,dv \\ &\qquad - (e^u - e^{-u})\cos\frac{v}{2}\,dv^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

les variables u et v étant réelles. L'intégration ne paraît pas possible par les fonctions élémentaires.

En effectuant les calculs qui conduisent à l'équation (E), on remarque la relation

$$\frac{p}{q} = -\cot g\,\frac{v}{2},$$

p et q étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, ce qui montre que, pour $v = \pi$, c'est-à-dire pour tous les points de la parabole obtenue en coupant la surface par un plan perpendiculaire à la base de la cycloïde, à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs, on a $p = 0$. Mais les cosinus directeurs de la normale à la surface étant proportionnels à p, q et -1, on en conclut que la normale à la surface est, pour tous les points de la parabole considérée, dans un plan perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire dans

le plan même de cette courbe qui est dès lors à la fois une ligne géodésique et une ligne de courbure de la surface, tout comme la cycloïde donnée.

IV. — Mécanique rationnelle.

Théorie. — *Les équations du mouvement d'un système matériel étant supposées mises sous la forme canonique, montrer comment Jacobi a ramené l'intégration de ces équations à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

Application. — *Étant donné un hyperboloïde à une nappe représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où l'on suppose $a < b$, déterminer le mouvement d'un point matériel non pesant dont la masse est égale à l'unité, qui est assujetti à rester sur la surface de l'hyperboloïde et qui est attiré vers le centre par une force égale au produit d'une constante ω^2 par la distance du mobile au centre.

A l'instant initial, le mobile est situé dans le plan des xz, à la distance b du centre, et la vitesse v_0 est parallèle à l'axe des y.

Discuter les diverses formes que peut affecter la trajectoire suivant les valeurs de v_0; indiquer notamment les lignes de courbure de l'hyperboloïde entre lesquelles elle est comprise. On déterminera la position du mobile sur l'hyperboloïde à une nappe à l'aide des coordonnées elliptiques λ et μ définies par les deux

équations

$$\frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} - \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1,$$

en supposant $c^2 < \lambda$ *et* $a^2 < \mu < b^2$.

Voir la *Dynamique analytique* de M. Émile Mathieu, où un calcul analogue est fait pour l'ellipsoïde.

SUR LES POLYÈDRES;

Par M. C. BOURLET.

Définition. — Un *polyèdre* est une surface composée de polygones plans, à contour unique ou à contour multiple (¹), ayant deux à deux un côté commun, de telle façon que deux polygones voisins n'aient pas leurs plans confondus et qu'un côté quelconque de l'un de ces polygones appartienne toujours à un autre polygone et à *un seul autre*.

Les *portions de plan*, limitées par ces polygones, et composées des points *intérieurs* à ces polygones sont appelées les *faces* du polyèdre. Les côtés de ces polygones sont les *arêtes*, et les sommets, les *sommets du polyèdre*.

Remarque I. — Nous supposerons dans tout ce qui

(¹) Un polygone plan est dit à *contour unique* si l'on peut aller d'un point quelconque de ce contour à un autre point de ce même contour en suivant le contour. Dans le cas contraire, on dira que le contour est *multiple*.

suivra que le polyèdre est à *surface unique*, c'est-à-dire qu'on peut aller d'un point quelconque de la surface à un autre point de cette surface par un chemin continu tracé tout entier sur elle. Toute surface répondant aux conditions de la définition et ne satisfaisant pas à cette dernière serait un ensemble de plusieurs polyèdres à surface unique.

Remarque II. — Il pourra arriver que deux *faces* (¹) se coupent, c'est-à-dire que deux *faces* aient en commun des points non situés sur des arêtes. Il ne faudra pas confondre ces droites d'intersection de deux faces avec les arêtes : nous les appellerons *droites singulières* du polyèdre.

Remarque III. — Il résulte de la définition que par toute arête il passe deux faces et deux faces seulement et qu'à tout sommet aboutissent *au moins trois* arêtes.

Remarque IV. — Les arêtes étant des portions limitées de droites, il en résulte que, si un plan se déplace parallèlement à lui-même, il devra arriver un moment où il ne rencontrera plus aucune arête, car sans cela il y aurait des arêtes illimitées. Donc on peut toujours trouver un plan parallèle à un plan donné et qui ne coupe aucune des arêtes du polyèdre. De même, les faces étant des portions de plans limitées par des contours fermés, on pourra toujours trouver une droite parallèle à une droite donnée et qui ne rencontre aucune des faces du polyèdre.

(¹) Je rappelle que le mot *face* désigne une *portion de plan* limitée par un polygone. Il ne faut pas confondre la *face* et le *plan de la face*.

Théorème I. — *Toute droite* indéfinie *coupe un polyèdre en un nombre* pair *de points.*

Remarquons d'abord que, quand une droite D se déplace, si un des points d'intersection de cette droite avec le polyèdre disparaît, il disparaîtra en même temps un autre point d'intersection et *un seul*. En effet, pour que le point d'intersection P de D avec une face F disparaisse, quand D se déplace, il faut que ce point vienne rencontrer un côté A de la face F, c'est-à-dire que la droite D rencontre une arète A du polyèdre; or, une arète A d'un polyèdre étant toujours commune à deux faces F et F′, et à deux seulement, il pourra se présenter deux cas : ou bien la droite D rencontrait F′ en un point P′ *avant* de traverser A, et alors, quand D rencontre A et la *dépasse*, P et P′ viennent se confondre et disparaissent en même temps; ou bien D ne rencontrait pas F′ *avant* de traverser A, mais alors D rencontrera F′ en un point P′ *après* avoir traversé A, et le point P disparu sera remplacé par le point P′. Donc, quand une droite D se déplace, il apparaît ou il disparaît toujours un nombre pair de points d'intersection : la parité du nombre des points d'intersection avec le polyèdre est donc la même pour toutes les droites de l'espace. Or, d'après la remarque IV, il existe toujours une droite qui *ne coupe pas le polyèdre :* donc toute droite indéfinie coupe le polyèdre en un nombre pair de points.

Théorème II. — *Si l'on considère un polyèdre et un point fixe* P *dans l'espace, non situé sur le polyèdre, la parité du nombre des points d'intersection d'une* semi-droite, *issue de* P, *avec le polyèdre, est toujours la même quelle que soit la direction de cette semi-droite dans l'espace.*

Ceci résulte immédiatement du fait, démontré dans

le théorème I, que, quand une semi-droite tourne autour de P, le nombre des points d'intersection qui apparait ou qui disparaît est toujours *pair*.

Ce théorème nous permet de classer les points de l'espace en deux groupes par rapport au polyèdre.

Définition. — Un point, non situé sur l'une des faces du polyèdre, est dit *extérieur* au polyèdre si le nombre des points d'intersection des semi-droites, issues de ce point, avec le polyèdre est *pair*. Quand ce nombre est *impair*, le point est dit *intérieur* au polyèdre.

L'ensemble des points intérieurs au polyèdre forme ce que nous appellerons l'*intérieur du polyèdre*; nous montrerons plus loin que c'est une grandeur mesurable et sa mesure sera ce que nous appellerons le *volume* du polyèdre.

Remarque. — Il résulte de la définition des points intérieurs que toute semi-droite issue d'un tel point coupe le polyèdre *au moins en un point*.

Théorème III. — *Si un plan* Π *ne coupe pas un polyèdre* P :

1° *Le polyèdre* P *est situé tout entier d'un même côté de* Π;

2° *Tous les points de* Π *et tous les points situés d'un côté de* Π *différent que* P *sont extérieurs à* P ;

3° *Tous les points intérieurs à* P *sont situés d'un même côté de* Π *que* P.

En effet :

1° Supposons que deux points A et B, appartenant à P, soient situés de part et d'autre de Π. Alors, tout chemin *continu* allant de A en B traverserait nécessairement le plan Π et, comme Π ne contient *aucun point* de P, on ne pourrait aller de A en B par un chemin

continu tracé *tout entier* sur la surface de P. Il ne peut donc y avoir deux points de P situés de part et d'autre de Π.

2° Soit E un point situé sur Π ou de côté différent de Π que P. Si l'on mène par E une semi-droite parallèle au plan Π, cette semi-droite ne rencontrera pas P : donc E est extérieur.

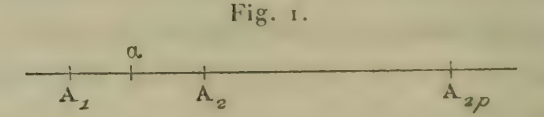
3° Soit I un point intérieur à P. Menons par I une semi-droite parallèle au plan Π; puisque I est intérieur à P, cette semi-droite coupera P au moins en un point C. Mais le segment de droite IC, étant parallèle à Π, ne rencontre pas Π; I et C sont donc d'un même côté de Π : donc P et I sont d'un même côté de Π, puisque tous les points de P sont d'un même côté de Π et que C appartient à P.

Définition. — Quand le nombre des points d'intersection des semi-droites issues d'un point quelconque *intérieur* à un polyèdre est toujours égal à *un*, le polyèdre est dit *convexe*.

Théorème IV. — *Toute droite indéfinie coupe un polyèdre convexe en zéro ou deux points.*

En effet, soient (*fig.* 1) $A_1, A_2, \ldots, A_{2p}$ les points d'intersection d'une droite indéfinie avec le polyèdre au

Fig. 1.



nombre de $2p$ ($p > 0$). Soit α un point de cette droite compris entre les deux premiers points à gauche A_1 et A_2; la semi-droite αA_{2p} coupera la surface en $2p - 1$ points : donc le point α est intérieur au polyèdre et l'on a

$$2p - 1 = 1 \quad \text{et} \quad p = 1.$$

Donc, si p n'est pas nul, on a nécessairement $p = 1$.

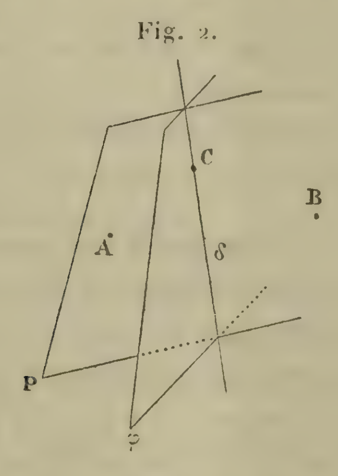
Réciproquement, si une droite indéfinie coupe un polyèdre en deux points au plus, ce polyèdre est convexe : car, les semi-droites issues d'un point intérieur coupant le polyèdre en un nombre impair de points, ce nombre impair, étant au plus égal à 2, est nécessairement égal à 1.

Remarque. — Il suit de là que si P et P′ sont deux points, situés sur la surface d'un polyèdre convexe et non situés dans une même face, tout point situé sur le segment de droite PP′ est *à l'intérieur* du polyèdre.

Théorème V. — *Si l'on prolonge indéfiniment le plan d'une face quelconque d'un polyèdre convexe, le polyèdre est situé tout entier d'un même côté de ce plan.*

En effet, soit (*fig.* 2) φ le plan de la face F et supposons qu'il y ait, de part et d'autre de φ, deux points A

Fig. 2.



et B appartenant au polyèdre ; soit alors C un point quelconque de la face F et considérons le plan P qui passe par les trois points A, B et C ; ce plan coupera le polyèdre suivant un polygone dont un des côtés sera situé sur la droite δ, intersection des plans P et φ, et contiendra le

point C. D'ailleurs ce polygone passera en A et B : donc il ne sera pas convexe, puisque A et B sont de part et d'autre de δ. On pourra donc trouver une droite D, située dans le plan P, qui coupera le polygone en plus de deux points et, par suite, qui coupera le polyèdre en plus de deux points. Le polyèdre n'est donc pas convexe.

Réciproquement, si un polyèdre est tel qu'en prolongeant indéfiniment le plan de l'une quelconque de ses faces le polyèdre soit situé tout entier d'un même côté de ce plan, ce polyèdre est convexe.

Car, si le polyèdre n'était pas convexe, on pourrait trouver un point intérieur α et une semi-droite αx, issue de α, tels que αx coupe le polyèdre en plus d'un point, par exemple en trois points A_1, A_2, A_3; mais alors, en prolongeant le plan de la face à laquelle appartient le point du milieu A_2, A_1 et A_3 seraient de part et d'autre de ce plan et le polyèdre ne serait pas tout entier d'un même côté de ce plan.

Corollaire I. — Les faces d'un polyèdre convexe sont des polygones convexes.

Corollaire II. — Un polyèdre convexe n'a pas de droites singulières.

Théorème VI. — *Tout point intérieur à un polyèdre convexe est situé, par rapport au plan de chacune des faces, du même côté que le polyèdre, et réciproquement, si un point est situé, par rapport au plan de chacune des faces, du même côté que le polyèdre, il est intérieur.*

La proposition directe résulte de la troisième partie du théorème III; démontrons la réciproque :

Soit A un point situé par rapport à toutes les faces du polyèdre convexe P, du même côté que ce polyèdre;

soit α un point pris dans une face. Si A était extérieur à P, la semi-droite $A\alpha$ couperait le polyèdre en un second point β et un seul. Soit alors F la face qui contient celui des deux points α ou β qui est le plus voisin de A : A et l'autre point d'intersection seraient alors situés de part et d'autre du plan de F et, par conséquent, A et le polyèdre P seraient situés de part et d'autre de ce plan, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. — Si un point A est extérieur à un polyèdre *convexe* P, il existe au moins une face de P telle que A et le polyèdre P soient de part et d'autre du plan de cette face.

Ici se placeraient maintenant, dans un cours complet sur les polyèdres, la définition et l'étude des polyèdres convexes simples : prismes et pyramides, troncs de prismes et troncs de pyramides, ainsi que la recherche de l'expression de leur volume. Nous laissons au lecteur le soin de faire cette étude en restant dans l'ordre d'idées dans lequel nous nous sommes placé et nous passons immédiatement aux polyèdres *non convexes,* en considérant cette étude comme faite.

Définition. — On dira qu'un polyèdre P est *décomposé* en un certain nombre k de polyèdres, si l'on a trouvé k polyèdres $P_1, P_2, \ldots, P_k$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Un point quelconque situé à l'*intérieur* de l'un de ces polyèdres est *extérieur* à tous les autres;

2° Deux polyèdres peuvent avoir en commun une face, ou une arête, ou un sommet;

3° Si l'on supprime les faces et les arêtes communes dans tous ces polyèdres, la figure formée par les faces restantes est identique au polyèdre P.

Lemme. — *Si deux polyèdres convexes* P *et* P′ *sont tels qu'ils sont tous deux situés d'un même côté du plan de l'une quelconque des faces de l'un d'eux, ces deux polyèdres coïncident.*

Pour démontrer ce lemme, nous allons montrer que tout point intérieur à l'un est intérieur à l'autre et que tout point extérieur à l'un est extérieur à l'autre. Soit I un point intérieur à P, et soit F′ une face quelconque de P′, I et P sont situés d'un même côté du plan φ' de F′ puisque I est intérieur à P (théorème III) : donc I et P′ sont situés d'un même côté de φ'. I, étant du même côté que P′ par rapport aux plans des faces de P′, est, en vertu du théorème VI, intérieur à P′. On verrait de même que tout point intérieur à P′ est intérieur à P.

Soit E un point extérieur à P. D'après le corollaire du théorème VI, il existe au moins une face F de P telle que E et P soient de part et d'autre du plan φ de F ; mais alors, comme P et P′ sont d'un même côté de φ, on en conclut que E et P′ sont de part et d'autre de φ. Donc (théorème III) E est extérieur à P′.

L'identité des points intérieurs et extérieurs à P et P′ entraîne nécessairement celle des points situés sur ces surfaces.

Théorème VII. — *Tout polyèdre qui n'est pas convexe est* décomposable *en polyèdres convexes.*

Soit P un polyèdre non convexe dont les faces sont F_1, F_2, . . . , F_n. Prolongeons indéfiniment, dans tous les sens, le plan φ_1 de la face F_1 et, si ce plan rencontre le polyèdre, nous imaginerons qu'il le *coupe*.

Précisons ceci : le plan φ_1 pourra couper certaines des faces F_2, . . . , F_n suivant des segments de droite et partager ainsi ces faces en deux polygones ayant un côté

commun. Imaginons alors que l'on considère, pour un instant, le plan φ_1 comme résultant de la superposition de deux plans φ'_1 et φ''_1 situés, l'un à gauche, l'autre à droite de φ_1 ; et chacun de ces segments de droite comme deux segments de droite superposés situés l'un dans φ'_1 et l'autre dans φ''_1. En outre, considérons chacun des côtés de F_1 comme tracé dans celui des deux plans φ'_1 ou φ''_1 qui se trouve, par rapport à φ_1, du même côté que la face, différente de F_1, à laquelle appartient ce côté (ceci revient à dire qu'on laisse chaque côté dans la face, différente de F, à laquelle il appartient).

Nous avons ainsi imaginé deux systèmes de segments de droite situés dans les plans φ'_1 et φ''_1. Il est aisé de se rendre compte que les segments de droite (intersections de φ_1 avec les faces $F_2, \ldots, F_n, \ldots$ et côtés de F_1) tracés dans l'un quelconque de ces deux plans forment un polygone *fermé*, à contour unique ou multiple, en remarquant que l'extrémité d'un quelconque de ces segments de droite est sur une arête, que par une arête il passe toujours deux faces et par conséquent que toute extrémité d'un de ces segments est l'extrémité d'un autre.

Cela étant, considérons les *portions* des plans φ'_1 et φ''_1 limitées par ces deux polygones et composées des *points intérieurs* à ces polygones, que nous appellerons F'_1 et F''_1. Remplaçons alors dans le polyèdre P chacune des faces $F_2, \ldots, F_n$ par deux faces ayant un côté commun situé dans le plan φ_1 et la face F_1 par les deux faces F'_1 et F''_1.

Par cette opération, nous aurons substitué au polyèdre P un ou plusieurs polyèdres répondant bien à la définition des polyèdres (cela est aisé à voir) et jouissant des propriétés suivantes :

1° Chacun de ces polyèdres est situé tout entier d'un même côté du plan φ_1.

2° Si l'on supprime dans ces polyèdres les arêtes et les portions de faces communes, l'ensemble des arêtes et des faces restantes reproduit le polyèdre P.

Cela fait, imaginons qu'on prolonge de même, dans tous les sens, le plan φ_2 de la face F_2 et, si ce plan rencontre les faces des nouveaux polyèdres, nous imaginerons de nouveau qu'on ait tracé les segments de droite d'intersection avec ces faces. Nous recommencerons la même opération que précédemment en remplaçant chacune des faces rencontrées par deux faces ayant un côté commun et en introduisant deux nouvelles faces situées dans le plan φ_2. Nous aurons ainsi substitué aux nouveaux polyèdres et, par suite, au polyèdre P, des polyèdres tels que :

1° Ils sont situés d'un même côté de φ_1 et φ_2;

2° Si l'on supprime les arêtes et les portions de faces communes, on reproduit P.

Nous prolongerons ensuite φ_3 et ainsi de suite jusqu'à φ_n. Au bout de la $n^{\text{ième}}$ opération, nous aurons substitué à P plusieurs polyèdres $P_1, P_2, \ldots, P_k$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Ils sont tous *convexes*, car le plan de l'une quelconque des faces de l'un d'eux est un des plans φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et chacun d'eux est situé tout entier d'un même côté de l'un quelconque de ces plans;

2° Si l'on supprime les faces communes et les arêtes communes, les faces restantes constituent le polyèdre P;

3° Un point quelconque intérieur à l'un de ces polyèdres P_i est extérieur à tous les autres. En effet, il existe toujours au moins un plan φ_h tel que deux des polyèdres, P_i et P_j, soient de part et d'autre de φ_h. Car, si P_i et P_j étaient tous deux d'un même côté par rapport à tous les plans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, ils coïncideraient, en

vertu du *lemme*, puisque les plans de leurs faces sont tous compris dans la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Soit alors I un point intérieur à P_i, il est du même côté de φ_h que P_i (théorème III, 3°) et, par suite, il est de côté différent de φ_h que P_j : il est donc extérieur à P_j (théorème III, 2°).

Les polyèdres convexes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ constituent donc bien une *décomposition* du polyèdre P.

Remarque I. — Il est aisé de se rendre compte que, puisque la surface du polyèdre P est *unique*, on peut toujours trouver une suite de polyèdres pris dans la suite $P_1, P_2, \ldots, P_k$ commençant par un polyèdre donné P_i et se terminant par un autre P_j, et telle que tout polyèdre de la suite ait *une face* ou *une arête* commune avec le polyèdre précédent, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite continue de polyèdres rattachés les uns aux autres et formant ainsi une chaîne reliant deux polyèdres quelconques P_i et P_j.

Remarque II. — Quand deux polyèdres P_i et P_j ont en commun *une arête* et une arête *seulement*, on voit immédiatement que l'une des faces de P_i aboutissant à cette arête doit être dans un même plan avec une des faces de P_j aboutissant à cette même arête, car sans cela le plan de l'une de ces deux faces traverserait le polyèdre auquel elle n'appartient pas, ce qui est impossible puisque les plans de toutes les faces de P_i et P_j appartiennent à la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et que ces deux polyèdres sont chacun situés en entier d'un même côté par rapport à chacun de ces plans. On en conclut que la suppression de cette arête commune donnera dans le polyèdre P une droite singulière. Donc, si un polyèdre n'a pas de droites singulières, deux polyèdres de la *décomposition* n'ont jamais une *arête seule* en commun :

s'ils se touchent, ils ont en commun soit un sommet, soit une face. Donc, dans ce cas, un polyèdre de la suite qui lie deux polyèdres P_i et P_j a en commun, avec le précédent, *une face tout entière.*

Théorème VIII. — *Tout polyèdre peut être* décomposé *en tétraèdres.*

1° Je dis que tout polyèdre convexe est décomposable en tétraèdres. En effet, les faces étant des polygones convexes, on peut *décomposer* chacune de ces faces en triangles en joignant un sommet quelconque à tous les autres (tout point intérieur à un de ces triangles n'est situé à l'intérieur d'aucun autre). Par ce procédé les faces du polyèdre sont décomposées en triangles t_1, t_2, ..., t_k. Soit alors (*fig.* 3) O un point quelconque

Fig. 3.

intérieur au polyèdre : je joins O à tous les sommets du polyèdre. Les sommets des triangles t_1, t_2, ..., t_k coïncident avec les sommets du polyèdre; donc les trois droites OA, OB, OC qui joignent le point O aux trois sommets qui déterminent un triangle t_i forment, avec ce triangle, un certain tétraèdre T_i. Nous formons ainsi k tétraèdres T_1, T_2, ..., T_k. Ces tétraèdres ont deux à deux une face commune : car, si deux triangles t_i et t_j ont un côté commun AC, les tétraèdres T_i et T_j ont en commun la face OAC.

Tout point situé à l'intérieur d'un tétraèdre T_i est à

l'extérieur de tous les autres : en effet, soit α un point intérieur à T_i; la semi-droite $O\alpha$, prolongée au delà de α, coupera t_i; d'ailleurs, comme le polyèdre est convexe et que O est intérieur, $O\alpha$ coupe une face et une seule du polyèdre : elle ne rencontre donc aucun autre triangle que t_i. La semi-droite issue de α et de direction *opposée* à la direction αO ne coupe aucune des faces des tétraèdres autres que T_i : α est donc extérieur à tous ces tétraèdres. Enfin, il est bien clair que, si l'on supprime les faces communes, telles que AOC, il ne restera que les triangles t_1, t_2, ..., t_k qui constituent la surface du polyèdre donné. Les tétraèdres T_1, T_2, ..., T_k décomposent donc ce polyèdre.

2° Un polyèdre quelconque est décomposable en tétraèdres. En effet, commençons par le décomposer en polyèdres convexes, puis décomposons chacun de ces polyèdres convexes en tétraèdres ; mais, dans cette décomposition, nous aurons soin de décomposer une face commune à deux polyèdres de la même façon dans les deux polyèdres. Nous aurons ainsi obtenu la décomposition demandée.

Théorème IX. — *Quand un polyèdre* P *est décomposé en un certain nombre de polyèdres* P_1, P_2, ..., P_h :

1° *Tout point intérieur à un polyèdre* P_i *est intérieur au polyèdre* P ;

2° *Tout point extérieur à la fois à tous les polyèdres* P_1, P_2, ..., P_h *est extérieur au polyèdre* P.

En effet :

1° Soit A un point intérieur à P_i; A sera extérieur à tous les polyèdres P_j $(j \neq i)$. Considérons une semi-droite Ax issue de A et ses intersections avec tous les polyèdres P_1, P_2, ..., P_h : cette semi-droite coupe

P_i en un nombre *impair* de points et chacun des autres en un nombre *pair* de points. Le nombre total des points d'intersection est donc *impair*. Or ces points d'intersection sont composés d'abord des points d'intersection de Ax avec les faces de P et en outre des points d'intersection avec les faces communes. Chaque point d'intersection avec une face commune à deux polyèdres est comptée deux fois et deux fois seulement : le nombre total de ces points d'intersection est donc *pair*. Donc Ax coupe P en un nombre impair de points : A est *intérieur* à P.

2° Si A est extérieur à P_1, P_2, ..., P_h, Ax coupe chacun des polyèdres P_1, ..., P_h en un nombre *pair* de points; elle coupe donc P en un nombre *pair* de points et A est *extérieur* à P.

Corollaire. — Tout point intérieur à P est intérieur à un polyèdre P_i et à un seul.

Donc l'ensemble des points intérieurs à P est *identique* à l'ensemble des points intérieurs aux divers polyèdres composants P_1, P_2, ..., P_h.

Première conséquence. — L'*intérieur* d'un polyèdre est égal à la somme des *intérieurs* des divers polyèdres composants.

L'*intérieur* d'un polyèdre est donc mesurable et le *volume* d'un polyèdre est égal à la somme des *volumes* des polyèdres en lesquels il est décomposé.

En particulier, si l'on décompose un polyèdre P en tétraèdres T_1, T_2, ..., T_k, on a

$$\text{vol. P} = \text{vol. T}_1 + \text{vol. T}_2 + \ldots + \text{vol. T}_k.$$

Seconde conséquence. — Si un polyèdre P *n'a pas de droites singulières*, on peut toujours trouver un chemin continu, *situé tout entier à l'intérieur du po-*

lyèdre, et allant d'un point intérieur quelconque à un autre point intérieur.

En effet, soient I et J deux points intérieurs à P. Imaginons qu'on ait décomposé P en polyèdres *convexes* P_1, P_2, ..., P_h, et soient P_i et P_j les deux polyèdres à l'intérieur desquels se trouvent respectivement I et J (théorème IX, corollaire).

Soient P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_n} des polyèdres tirés de la suite P_1, ..., P_h et tels que la suite P_i, P_{i_1}, ..., P_{i_n}, P_j forme une suite continue (théorème VII, remarque I), P_i et P_{i_1} auront une face commune F_1 (théorème VII, remarque II), P_{i_2} et P_{i_1} une face F_2, ..., P_{i_n} et P_j auront une face commune F_{n+1}.

Soient alors A_1, A_2, ..., A_{n+1} des points situés respectivement à l'intérieur des faces F_1, F_2, ..., F_{n+1}. Le chemin polygonal $IF_1F_2 \ldots F_{n+1}J$ sera situé tout entier à l'intérieur de P; car chacune de ses parties, par exemple F_lF_{l+1}, étant à l'intérieur de P_{i_l} (théorème IV, remarque) tout entière, est située à l'intérieur de P.

Remarque. — Dans le cas des polyèdres admettant des droites singulières, on peut encore trouver un chemin continu situé à l'intérieur et reliant deux points intérieurs quelconques, mais ce chemin pourra quelquefois *traverser* la surface en des points situés sur des lignes singulières. En tous cas, ce chemin se composera de points intérieurs et d'un nombre fini de points situés sur la surface et ne contiendra pas de points extérieurs.

Polyèdres semblables.

Définition. — Deux polyèdres P et Q sont dits *correspondants* si l'on peut établir entre leurs éléments

une correspondance *univoque* et *réciproque,* de telle façon qu'à chaque sommet de P corresponde un sommet de Q, à chaque arête une arête, etc.; et, de plus, de telle façon que deux couples de sommets correspondants soient reliées par des arêtes correspondantes, que deux arêtes correspondantes soient à l'intersection de faces correspondantes, etc. (1).

Théorème X. — *Lorsque deux polyèdres correspondants ont leurs angles polyèdres correspondants égaux et les faces correspondantes égales, ils sont* superposables (*on suppose évidemment que les éléments qui se correspondent dans les angles polyèdres et dans les faces sont des éléments égaux*).

Soient F une face du polyèdre P, F′ la face correspondante égale dans le polyèdre P′. Faisons coïncider F′ avec F en faisant coïncider les sommets correspondants. Soient A un sommet de F, A′ le correspondant dans F′; soient AB et AC les côtés de F qui aboutissent en A, A′B′ et A′C′ les côtés correspondants dans F′. A′B′ et A′C′ coïncident avec AB et AC; donc deux arêtes de l'angle polyèdre A′ coïncident avec leurs correspondantes dans l'angle polyèdre A, et les angles polyèdres A et A′ coïncident. On verrait de même que tous les angles polyèdres B et B′, C et C′, ..., aux différents

(1) Je rappelle qu'on peut imaginer une correspondance toute pareille pour les polygones plans et pour les angles polyèdres. Deux polygones plans, égaux et correspondants, coïncident quand deux côtés correspondants coïncident et cette coïncidence n'est possible que d'une seule manière (ainsi il n'y a qu'une seule manière de faire coïncider deux triangles équilatéraux correspondants et égaux si l'on fait coïncider les éléments correspondants). De même, deux angles polyèdres, correspondants et égaux, coïncident si deux arêtes coïncident avec leurs correspondantes, et cette coïncidence n'est possible que d'une seule manière.

sommets de F et de F′, coïncident. Mais alors la face F'_1, adjacente à F′ suivant A′B′, coïncide avec sa correspondante F_1, adjacente à F suivant AB, car A′B′ coïncide avec AB, et les deux côtés de F'_1 passant par A′ et B′ et différents de AB coïncident en direction avec leurs correspondants dans F_1. On verrait de même que toutes les faces adjacentes à F′ coïncident avec leurs correspondantes. En recommençant pour ces faces le même raisonnement que pour F′, on verrait de proche en proche que *toutes* les faces de P′ coïncident avec leurs correspondantes dans P; car nous avons supposé que l'on pouvait aller d'un point quelconque de la surface d'un polyèdre à un autre par un chemin continu tracé tout entier sur la surface.

Définition. — Deux polyèdres sont dits *semblables* s'ils sont correspondants, si les angles polyèdres correspondants sont égaux et les faces correspondantes semblables.

Les éléments correspondants de deux polyèdres semblables sont appelés éléments *homologues*.

Remarque. — Le rapport de similitude de deux faces homologues de deux polyèdres semblables P et P′ est le même quelles que soient ces faces. Soient F et F_1 deux faces de P ayant un côté commun AB; les deux faces homologues dans P′, F′ et F'_1 auront un côté commun A′B′; le rapport de similitude de F′ à F, ainsi que celui de F'_1 à F_1, est $\frac{A'B'}{AB}$: deux faces voisines sont donc dans le même rapport de similitude avec leurs homologues. Il en est donc de même pour deux faces quelconques, car, puisque la surface est unique, deux faces quelconques d'un polyèdre sont reliées par une suite de faces ayant deux à deux un côté commun.

Ce rapport de similitude commun à toutes les faces homologues des deux polyèdres est ce qu'on appelle *le rapport de similitude des deux polyèdres.*

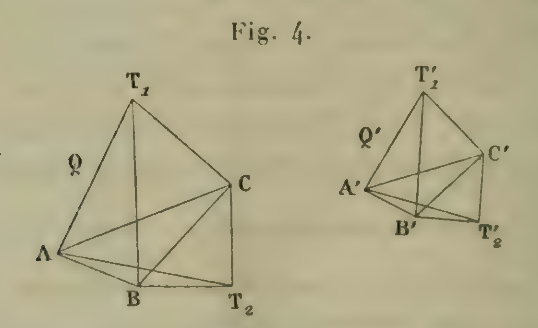
Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe un polyèdre semblable à un polyèdre donné dans un rapport de similitude donné : nous allons montrer qu'il y en a un.

Théorème XI. — *Il existe un tétraèdre semblable à un tétraèdre donné dans un rapport de similitude donné et* un seul. (Nous passons cette démonstration.)

Théorème XII. — *Si l'on décompose un polyèdre quelconque* P *en tétraèdres* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *et si l'on construit des tétraèdres* $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ *semblables aux précédents, dans le même rapport de similitude* λ, *les tétraèdres* $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ *pourront être assemblés de la même façon que les tétraèdres* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *et leur ensemble, après suppression des faces communes, constituera un polyèdre semblable au polyèdre proposé* P, *dans le rapport de similitude* λ.

Supposons d'abord que les deux tétraèdres T_1 et T_2 aient une *face commune* $\mathcal{A}$. Soient (*fig.* 4) $A_1B_1C_1$ cette face dans T_1 et $A_2B_2C_2$ cette face dans T_2 : A_1 coïncide

Fig. 4.



avec A_2, etc. Soit $A'_1B'_1C'_1$ la face de T'_1 homologue de $A_1B_1C_1$ et $A'_2B'_2C'_2$ celle de T'_2 homologue de $A_2B_2C_2$: $A'_1B'_1C'_1$ et $A'_2B'_2C'_2$ sont deux triangles égaux et corres-

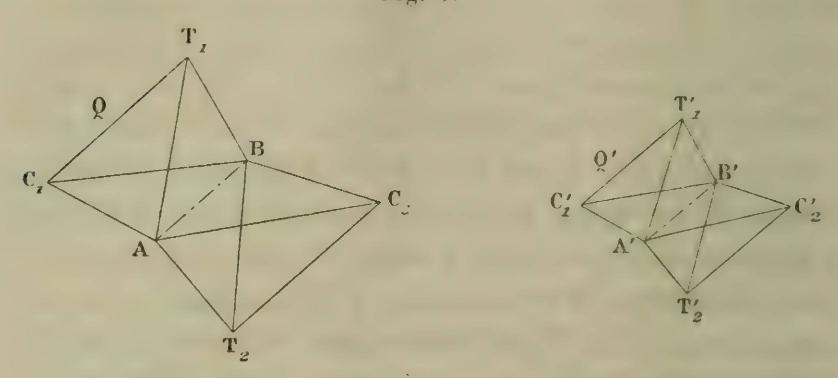
pondants comme semblables à des triangles égaux dans le même rapport de similitude λ. Faisons alors coïncider ces deux faces en faisant coïncider A'_2 avec A'_1, B'_2 avec B'_1, C'_2 avec C'_1 (ce qui est possible), puis supprimons cette face commune dans T'_1 et T'_2; de même supprimons-la dans T_1, T_2. Nous obtenons ainsi, par la superposition de T_1 et T_2, T'_1 et T'_2, deux polyèdres Q et Q' qui sont semblables. En effet, les polyèdres sont correspondants : il suffit de considérer comme correspondants les éléments qui se correspondaient soit dans T_1 et T'_1, soit dans T_2 et T'_2; les angles polyèdres correspondants sont égaux : l'angle polyèdre T_1 est égal à T'_1 et T_2 à T'_2; je dis que l'angle A' est égal à l'angle A; portons A' sur A de façon à faire coïncider le point A' avec A, que $A'C'$ prenne la direction AC et $A'B'$ la direction AB, à cause de la correspondance et de l'égalité des angles $A'B'C'T'_1$ et $ABCT_1$, $A'T'_1$ prendra la direction AT_1 et de même $A'T'_2$ prendra la direction AT_2.

Les faces sont semblables : car, si aucune des faces de T_1 n'est dans un même plan avec une des faces de T_2, aucune des faces de T'_1 ne sera dans un même plan avec une des faces de T'_2, et les faces correspondantes de Q et Q', étant des faces correspondantes des tétraèdres composants, sont semblables. Supposons, au contraire, que AT_1C et AT_2C soient dans un même plan : alors le quadrilatère AT_1CT_2 sera une face de Q, $A'T'_1C'$ et $A'T'_2C'$ seront aussi dans un même plan et $A'T'_1C'T'_2$ sera une face de Q' qui sera semblable à AT_1CT_2, comme composée d'un même nombre de triangles semblables et correspondants. Les deux polyèdres Q et Q' sont semblables.

Supposons en second lieu que les deux tétraèdres T_1 et T_2 aient une *arête commune*. Soit (AB), A_1B_1, A_2B_2 cette arête dans T_1 et T_2, les deux faces ABT_1 et ABT_2

ainsi que les faces ABC_1 et ABC_2 sont dans un même plan, et l'ensemble de T_1 et T_2 forme, après suppression de l'arète commune (AB), un polyèdre Q ayant quatre faces triangulaires et deux faces quadrangulaires AC_1BC_2 et AT_1BT_2 [(AB) est une ligne singulière de Q]. Les deux arêtes $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$ dans les tétraèdres T'_1 et T'_2

Fig. 5.



sont égales comme semblables à deux arêtes égales A_1B_1, A_2B_2 dans le même rapport de similitude λ. Pour la même raison les dièdres $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$ sont égaux. Faisons alors coïncider A'_1 et A'_2, B'_1 et B'_2 et disposons le tétraèdre T'_2 de façon que la face $A'B'T'_2$ soit dans le même plan que la face $A'B'T'_1$ et extérieure à cette face. Les deux dièdres $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$ seront alors dans la position de deux dièdres opposés par l'arète et $A'B'C'_2$ sera dans le même plan que $A'B'C'_1$ et extérieure à cette face. Si l'on supprime l'arète commune $(A'B')$ on obtient un polyèdre Q' ayant deux faces quadrangulaires $A'C'_1B'C'_2$ et $A'T'_1B'T'_2$ qui sont évidemment semblables respectivement aux faces AC_1BC_2 et AT_1BT_2 de Q.

D'ailleurs les angles polyèdres de Q et Q' sont égaux. C_1 est égal à C'_1, C_2 à C'_2, T_1 à T'_1, T_2 à T'_2; A' est égal à A, car si l'on porte A' sur A de façon que $A'C'_1$ prenne la direction AC_1 et $A'C'_2$ la direction AC_2, la droite singulière

$A'B'$ prendra nécessairement la direction AB et les deux dièdres ABC_1T_1 et $A'B'C'_1T'_1$ coïncideront, puisqu'ils sont égaux et que deux arêtes correspondantes $A'B'$ et AB, $A'C'_1$ et AC_1 auront la même direction; $A'T'_1$ prendra donc la direction AT_1 et de même $A'T'_2$ prendra la direction AT_2 : les deux dièdres $A'C'_2C'_1T'_1T'_2$ et $AC_2C_1T_1T_2$ sont donc égaux. Les polyèdres Q et Q' sont semblables.

Cela étant, un des deux tétraèdres T_1 ou T_2 aura soit une arête, soit une face en commun avec un des tétraèdres $T_3, \ldots, T_k$: par exemple, T_2 aura une face commune avec T_3 et, après suppression de cette face commune, l'ensemble des tétraèdres $T_1T_2T_3$, c'est-à-dire l'ensemble de Q et de T_3 formera un certain polyèdre R. On verra alors aisément, par des raisonnements identiques à ceux que nous venons de faire, que T'_2 et T'_3 pourront être assemblés comme T_2 et T_3 et que l'ensemble de Q' et de T'_3 forme un polyèdre R' semblable à R. En continuant de la sorte, on verra de proche en proche que, puisqu'à deux tétraèdres de la série (T), ayant une arête ou une face commune, correspondent deux tétraèdres dans la série (T'), pouvant être assemblés de la même façon, on pourra assembler successivement les tétraèdres (T') de la même façon que les tétraèdres (T), et que les polyèdres successifs Q, $R, \ldots, Q', R', \ldots$ seront toujours semblables. Donc, finalement, on pourra superposer tous les tétraèdres (T') de même que les tétraèdres (T), et le polyèdre final P' obtenu sera semblable au polyèdre P dans le rapport de similitude λ.

Nous avons ainsi prouvé qu'il existe *un* polyèdre semblable à un polyèdre donné, dans un rapport de similitude donné; nous allons maintenant montrer qu'il n'y en a qu'*un seul*.

Théorème XIII. — *Si deux polyèdres* P_1 *et* P_2 *sont semblables à un même polyèdre* P, *dans le même rapport de similitude* λ, *ils sont* identiques.

En effet, faisons correspondre dans P_1 et P_2 les éléments qui sont homologues d'un même élément de P : les deux polyèdres P_1 et P_2 sont donc correspondants. D'ailleurs, deux angles polyèdres correspondants sont égaux, puisqu'ils sont égaux à un troisième, et deux faces correspondantes sont égales, comme semblables à une même face de P dans le même rapport de similitude. Donc (théorème X), P_1 et P_2 sont superposables.

Corollaire I. — Il n'y a qu'un seul polyèdre semblable à un polyèdre donné dans un rapport de similitude donné.

Corollaire II. — Deux polyèdres semblables sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés.

Théorème XIV. — *Le rapport des volumes des deux tétraèdres semblables est égal au rapport des cubes de deux arêtes homologues.* (Nous passons cette démonstration.)

Théorème XV. — *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au rapport des cubes de deux arêtes homologues.*

En effet, soient P et P' deux polyèdres semblables dans le rapport λ. Supposons P décomposé en tétraèdres $T_1, T_2, \ldots, T_k$ et soient $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ les tétraèdres semblables dans le rapport λ. On aura

$$\text{vol.}\,P = \text{vol.}\,T_1 + \text{vol.}\,T_2 + \ldots + \text{vol.}\,T_k,$$
$$\text{vol.}\,P' = \text{vol.}\,T'_1 + \text{vol.}\,T'_2 + \ldots + \text{vol.}\,T'_k;$$

d'ailleurs

$$\lambda^3 = \frac{\text{vol. T}'_1}{\text{vol. T}_1} = \frac{\text{vol. T}'_2}{\text{vol. T}_2} = \ldots = \frac{\text{vol. T}'_k}{\text{vol. T}_k} = \frac{\text{vol. T}'_1 + \ldots + \text{vol. T}'_k}{\text{vol. T}_1 + \ldots + \text{vol. T}_k}.$$

Donc

$$\lambda^3 = \frac{\text{vol. P}'}{\text{vol. P}}.$$

λ est égal au rapport de deux arêtes homologues quelconques de deux tétraèdres semblables T'_i, T_i, et par conséquent λ est égal au rapport de deux arêtes homologues quelconques de P' et P.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET DE LA SURFACE RÉGLÉE DÉFINIE PAR TROIS DIRECTRICES RECTILIGNES;

Par M. L. LEFEVRE,

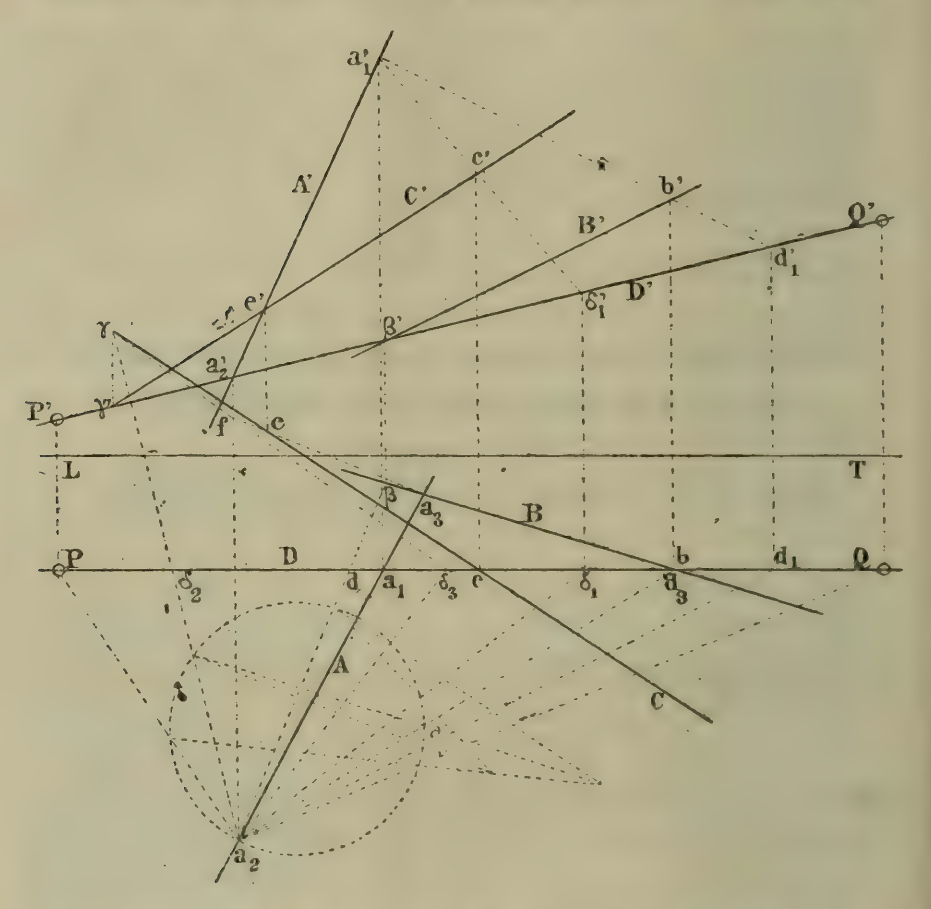
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens.

Des droites variables G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, ... rencontrent trois droites fixes A, B, C respectivement aux points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ... Je dis que ces trois séries de points sont homographiques deux à deux. Il suffit, pour cela, d'établir l'égalité des rapports anharmoniques, tels que (b_1, b_2, b_3, b_4) et (c_1, c_2, c_3, c_4); c'est ce qu'on reconnaît immédiatement en coupant B et C par les plans menés par A et chacune des génératrices G_1, G_2, G_3, G_4.

Cette remarque va nous permettre d'obtenir les points d'intersection d'une droite donnée D avec la surface engendrée par les droites G, ce qui revient à trouver une droite G s'appuyant sur D. On est conduit à considérer les deux hyperboloïdes définis par les directrices A, B,

D et A, C, D. Les génératrices du premier coupent A et D en des points a_1, a_2, a_3, a_4, ..., d_1, d_2, d_3, d_4, ...; celles du second en des points a_1, a_2, a_3, a_4, ..., δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, ...

Or, d'après ce qui précède, les deux divisions tracées sur D : d_1, d_2, d_3, d_4, ..., δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, ..., sont ho-



mographiques à a_1, a_2, a_3, a_4, ...; elles sont donc homographiques entre elles. Les points doubles P et Q de cette homographie sont les points cherchés, puisque par chacun de ces points passe une droite qui s'appuie à la fois sur A, B, D et sur A, C, D, c'est-à-dire sur A, B, C, D.

Pour définir une homographie, trois couples suffisent.

Donc, par trois points quelconques a_1, a_2. a_3 de A, on mènera les droites qui s'appuient sur B et D et celles qui s'appuient sur C et D : on aura ainsi les trois couples $d_1\delta_1$, $d_2\delta_2$, $d_3\delta_3$.

Dans l'épure, on a placé a_1 à l'intersection de A et du plan projetant D horizontalement, puis on a coupé B et C par ce plan, ce qui donne aisément d_1 et δ_1. On place a_2 à l'intersection de A et du plan projetant D verticalement, d'où d_2, δ_2. On prend a_3 au point d'intersection de A et du plan projetant B horizontalement; ce plan contenant a_3 et B coupe D au point d_3. Enfin on mène par a_3 une droite qui coupe C; on prend celle dont la projection verticale est A', elle coupe C en e, e' : sa projection horizontale est a_3e. Le plan passant par cette droite et par C coupe D en δ_3.

Quant à la construction des points doubles, elle se fait très simplement à l'aide d'un cercle que l'on peut faire passer par a_2 pour simplifier (voir *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 1119).

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888;

Par M. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Lorient.

On donne un quadrilatère plan OACB *et deux séries de paraboles : les unes tangentes en* A *à* AC *et ayant pour diamètre* OA ; *les autres tangentes en* B *à* BC *et ayant pour diamètre* OB.

On demande :

1° *De trouver le lieu du point de contact* M *d'une*

parabole de la première série avec une parabole de la deuxième série ;

2° *D'indiquer, en laissant le triangle* OAB *invariable, dans quelle région du plan il faut placer le point* C *pour que le lieu soit une ellipse ou une hyperbole ;*

3° *De démontrer, dans l'hypothèse où* OACB *est un parallélogramme, que la tangente commune en* M *aux deux paraboles pivote autour du point de concours* K *des médianes du triangle* ABC ;

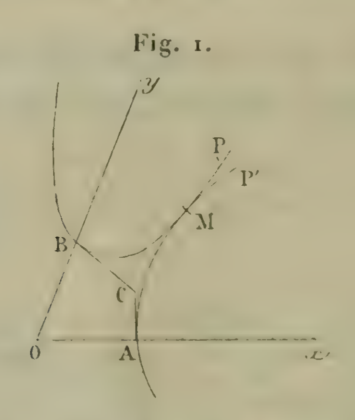
4° *De trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection* P *de la tangente en* M *aux deux paraboles avec l'autre tangente commune* DE *que l'on peut mener à ces deux courbes.*

N. B. — *On représentera la longueur* OA *par* a, *et la longueur* OB *par* b.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. Prenons pour axes de coordonnées OA et OB : soient (a, o), (o, b), (p, q) les coordonnées de A, B, C;

Fig. 1.



x_0, y_0 celles d'un point du lieu (*fig.* 1). Les paraboles P de la première série ont une équation de la forme

$$y^2 - 2P[y(p - a) - q(x - a)] = o.$$

De même, l'équation générale des paraboles P′ de la seconde série est

$$x^2 - 2P'[x(q-b) - p(y-b)] = 0.$$

Le point M du lieu appartenant à la fois aux deux paraboles, on a

$$\begin{aligned} y_0^2 - 2P\,[y_0(p-a) - q(x_0-a)] &= 0, \\ x_0^2 - 2P'[x_0(q-b) - p(y_0-b)] &= 0. \end{aligned}$$

Écrivons que les tangentes en M aux deux courbes sont confondues, nous aurons

$$\frac{Pq}{x_0 - P'(q-b)} = \frac{y_0 - P(p-a)}{P'p}.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira d'éliminer les paramètres P et P′ entre les trois relations précédentes, ce qui n'offre aucune difficulté puisque les deux premières sont du premier degré par rapport à ces paramètres. On trouve ainsi, en supprimant les indices,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &2q(q-b)x^2 + 2p(p-a)y^2 \\ &\quad - [3pq + (p-a)(q-b)]xy \\ &\quad + 2q[a(b-q) + 2pb]x \\ &\quad + 2p[b(a-p) + 2qa]y - 4pqab = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation représente une conique passant par les points A′ et B′, par le symétrique C′ de O par rapport à C, et enfin par les points de rencontre de C′A′ avec Oy et de C′B′ avec Ox, C′A′ et C′B′ étant les parallèles à CA et à CB, menées par le point C′.

II. Cette conique sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que nous aurons

$$[3pq + (p-a)(q-b)]^2 - 16pq(p-a)(q-b) \lesseqgtr 0,$$

inégalité qu'on peut facilement mettre sous la forme

$$(2)\qquad [(p-a)(q-b)-9pq][-aq-bq+ab] \gtrless 0.$$

Cela posé, construisons la droite ayant pour équation

$$(\text{AB})\qquad -ay-bx+ab=0,$$

et l'hyperbole représentée par

$$(\text{H})\qquad (x-a)(y-b)-9xy=0.$$

La droite n'est autre que AB. L'hyperbole passe en A et B, a pour centre le point $\left(-\frac{a}{8}, -\frac{b}{8}\right)$ et ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées (*fig.* 2).

Fig. 2.

On reconnaît aisément que pour tous les points situés dans les parties du plan couvertes de hachures, le premier membre de (2) est positif, et, par suite, (1) représente une hyperbole. Si C est dans les autres parties du plan, l'équation représente une ellipse.

Dans le cas particulier où C est un point de H ou de AB, la conique (1) est une parabole.

III. Si OABC est un parallélogramme, on a

$$p = a \quad \text{et} \quad q = b.$$

Les équations générales des paraboles deviennent, dans cette hypothèse,

$$y^2 + 2\mathrm{P}\, b(x - a) = 0,$$
$$x^2 + 2\mathrm{P}' a(y - b) = 0.$$

La tangente en M a pour équation

$$y - y_0 = -\frac{\mathrm{P}b}{y_0}(x - x_0),$$

avec les conditions

(3) $$y_0^2 + 2\mathrm{P}\, b(x_0 - a) = 0,$$

(4) $$x_0^2 + 2\mathrm{P}' a(y_0 - b) = 0,$$

(5) $$\frac{\mathrm{P}b}{y_0} = \frac{x_0}{\mathrm{P}'a},$$

de sorte que l'équation de la tangente s'écrit

$$(y - y_0) = \frac{y_0}{2(x_0 - a)}(x - x_0).$$

La relation qui exprime que cette droite passe par le centre de gravité K de ABC, dont les coordonnées sont $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$, est

$$2(x_0 - a)\left(\frac{2b}{3} - y_0\right) - y_0\left(\frac{2a}{3} - x_0\right) = 0$$

ou

$$-3x_0y_0 + 4(bx_0 + ay_0 - ab) = 0.$$

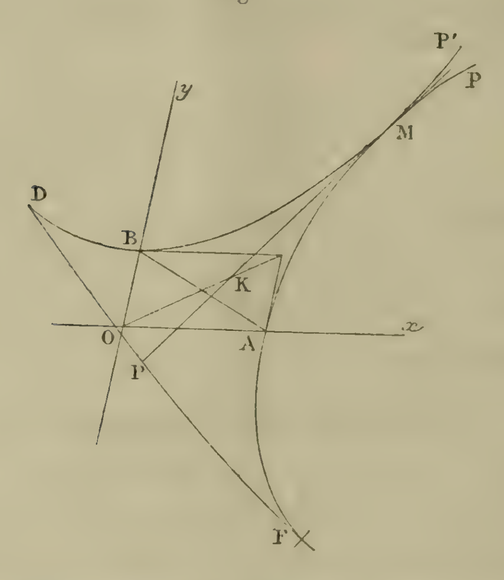
Or, en tenant compte de (3) et (4), on peut mettre (5) sous la forme

$$\frac{y_0}{2(x_0 - a)} = \frac{2(y_0 - b)}{x_0};$$

C'est précisément la relation demandée.

IV. Pour résoudre la quatrième partie, prenons pour paramètre le coefficient angulaire de la tangente commune en M (*fig.* 3).

Fig. 3.



Comme cette droite pivote autour du point K, son équation est de la forme

$$\text{(MT)} \qquad 3y - 2b = m(3x - 2a).$$

Cherchons les conditions pour que l'équation

$$(6) \qquad y = \mu x + \nu$$

représente la seconde tangente commune aux deux paraboles correspondant à une direction donnée m de MT.

L'équation aux abscisses des points communs à la droite (6) et à la parabole P est

$$(\mu x + \nu)^2 + 2Pb(x - a) = 0,$$

d'où la condition de tangence

$$(7) \qquad 2\mu\nu + Pb + 2a\mu^2 = 0.$$

Nous trouverons de même la condition suivante de contact de la droite (6) et de la parabole (P′)

$$(8)\qquad P' a\mu^2 - 2(\nu - b) = 0.$$

Éliminant ν entre les relations (7) et (8), on trouve

$$P' a\mu^3 + 2a\mu^2 + 2b\mu + Pb = 0,$$

qui est l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes aux deux paraboles. Cette équation doit admettre la valeur m pour racine double, d'où les relations

$$\mu + 2m = -\frac{2}{P'},$$

$$2\mu m + m^2 = \frac{2b}{P'a},$$

$$\mu m^2 = -\frac{Pb}{P'a}.$$

Éliminant P et P′, nous obtenons facilement

$$\mu = -\frac{m(2b + am)}{b + 2am}.$$

La valeur correspondante de ν est donnée par l'équation (8), par exemple. On trouve

$$\nu = -\frac{(am - b)^2}{3(2am + b)},$$

de sorte qu'enfin, m étant le coefficient angulaire de la tangente commune en M, l'autre tangente commune a pour équation

$$y = -\frac{m(2b + am)}{b + 2am}x - \frac{(am - b)^2}{3(2am + b)}$$

ou

$$(\text{DE})\qquad 3(2am + b)y + 3m(2b + am)x + (am - b)^2 = 0.$$

Nous aurons le lieu du point P d'intersection de (MT) et de (DE) en éliminant m entre les équations de ces deux droites.

Tirant m de la première, et transportant la valeur trouvée dans la seconde, nous obtenons

$$y(3x-2a)(2ay+bx-2ab) \\ +x(3y-2b)(ay+2bx-2ab)+(ay-bx)^2=0$$

ou

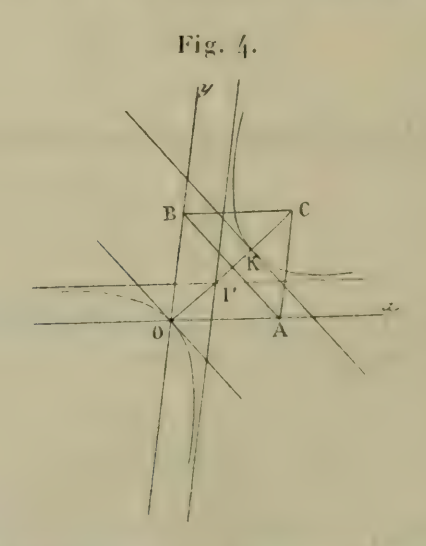
$$9xy(ay+bx)-(3a^2y^2+3b^2x^2+18abxy) \\ +4ab(ay+bx)=0,$$

ou

$$[3(ay+bx)-4ab][3xy-(ay+bx)]=0.$$

Le lieu se compose donc d'une droite et d'une hyperbole. La droite est la parallèle menée par K à AB.

Fig. 4.

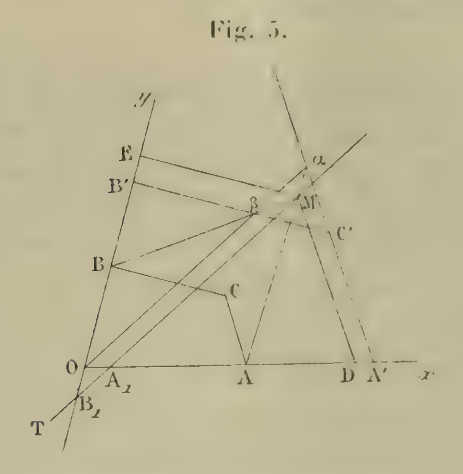


L'hyperbole a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; son centre est le centre de gravité de OAB; elle est tangente en K à la droite précédente et en O à la parallèle à AB menée par ce point (*fig.* 4).

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

I. Il est facile de reconnaître géométriquement que le lieu de M est une conique (*fig.* 5). Soit, en effet, MT la tangente commune à un groupe de deux paraboles de l'énoncé ; A_1 et B_1 les points de rencontre de

Fig. 5.



cette droite avec Ox et Oy ; MD et ME les parallèles menées par M à CA et CB. Il résulte d'une propriété connue de la parabole que A est le milieu de A_1D, et B le milieu de B_1E.

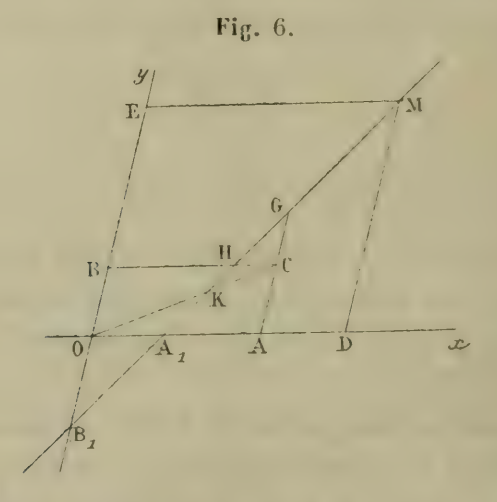
Par O, menons une parallèle à MT, rencontrant AM en α, et BM en β, et menons par α et β des parallèles à MD et ME ; soient A′ et B′ les points de rencontre de ces droites avec Ox et Oy. A est le milieu de OA′ ; B le milieu de OB′, de sorte que le lieu du point M peut être engendré comme il suit :

Faisons pivoter autour de O une droite rencontrant C′A′ en α et C′B′ en β ; le point M d'intersection de $A\alpha$ et $B\beta$ est un point du lieu. On voit que le côté $\alpha\beta$ du triangle variable $M\alpha\beta$ passe par un point fixe O ; et les côtés $M\alpha$ et $M\beta$ passent en A et B, points également

fixes. Le point M décrit donc une conique (théorème de Maclaurin). D'ailleurs cela résulte de ce que les points α et β forment sur $C'A'$ et $C'B'$ deux divisions homographiques et, par suite, $A\alpha$ et $B\beta$ deux faisceaux homographiques. La conique lieu de M passe par les sommets A et B des faisceaux. Elle passe aussi par C' et par les points de rencontre de Oy et $C'A'$ d'une part, de Ox et $C'B'$ d'autre part.

II. On reconnaît aussi simplement que la tangente commune en M pivote quand OACB est un parallélogramme (*fig.* 6). Soit, en effet, MA_1B_1 une tangente commune en M à deux paraboles. A étant le milieu de

Fig. 6.



A_1D, G est le milieu de A_1M. De même, H est le milieu de B_1M. Il en résulte que A_1B_1 est double de HG, et, par suite, à cause des triangles semblables CGH et OA_1B_1, que OB_1 est double de CG. Le rapport de similitude des triangles semblables KOB_1 et KCG est donc 2; donc enfin $OK = 2KC$, ce qui démontre la proposition.

ÉTUDE DU COMPLEXE PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885

[Suite et fin (¹)];

Par M. E. MARCHAND.

1. *Rectifications.* — Avant d'aller plus loin, je corrigerai deux résultats indiqués trop légèrement dans les considérations géométriques finales.

J'avais admis comme évident que toute droite du complexe, pénétrant entre les deux nappes de la surface des ondes, devait rencontrer la surface en deux points réels et en deux points imaginaires. Or il suffit de couper convenablement par un plan parallèle au *plan double* touchant suivant un cercle pour s'assurer qu'une droite peut parfaitement rencontrer la nappe extérieure en quatre points réels et avoir deux segments compris entre les deux nappes de la surface. Je ne suis plus fondé à dire, comme je l'ai fait à tort, que la droite singulière relative à un point M de la nappe extérieure donne deux foyers imaginaires. Malgré tout l'intérêt géométrique que pourrait présenter une discussion approfondie, je laisserai ce point complètement de côté.

La seconde erreur saute immédiatement aux yeux. J'écrivais : « Les courbes E et I se confondent pour les plans qui touchent la surface des ondes en tous les points d'un cercle. Ce cercle de contact est donc une conique du complexe. » Tout plan tangent à la surface des ondes donnant un système de deux points, il est inadmissible

(¹) *Voir* même Tome, p. 122.

que le plan double, tangent en tous les points d'un cercle, donne un véritable cercle. Quand les courbes E et I tendent vers le cercle de contact, la conique du complexe reste comprise entre ces deux courbes de manière à donner à la limite un point unique comptant double P. D'après les propriétés du cône asymptote

$$(11) \qquad \frac{x^2}{l}+\frac{y^2}{m}+\frac{z^2}{n}=0,$$

il faut que la section de ce cône par le plan double soit un cercle de centre P et non pas le cercle de contact.

Le point P est évidemment, par raison de symétrie, dans le plan principal perpendiculaire au plan double. Ce plan des zx coupe la surface des ondes suivant une ellipse et un cercle qui contiennent respectivement un point P et un point Q du cercle de contact. Le point P, situé sur l'ellipse, est, comme le prouverait un calcul facile que je ne reproduis pas, précisément le point double auquel se réduit la conique du complexe. Le point Q, situé sur le cercle, appartient, comme on sait, à la perpendiculaire abaissée du centre O de la surface sur le plan double. Alors OP est un diamètre de la sphère déterminée par le point O et le cercle de contact.

Si M est un point quelconque du cercle de contact, la droite MP est perpendiculaire à OM. Cette droite MP est donc la droite singulière relative au point M de la surface singulière. Ainsi les droites singulières relatives à tous les points du cercle double passent par le point P de l'ellipse principale. Or ces droites singulières appartiennent toutes au complexe

$$(10) \qquad l\alpha\alpha'+m\beta\beta'+n\gamma\gamma'=0$$

relatif aux surfaces homothétiques et homofocales

$$(\Sigma) \qquad \frac{x^2}{l+\rho}+\frac{y^2}{m+\rho}+\frac{z^2}{n+\rho}=\sigma.$$

La conique du complexe (10) relative au plan double doit donc se décomposer en deux points dont l'un sera précisément le point P.

Je supprime le calcul de vérification, me bornant à bien montrer d'où vient ce résultat. On sait que tout plan passant par le point à l'infini sur l'un des axes est singulier pour le complexe (10). Cela se comprend facilement si l'on remarque que le complexe (10) des axes des sections planes des surfaces (Σ) doit comprendre tous les diamètres des sections circulaires. Or tout plan de section circulaire est perpendiculaire à l'un des plans de coordonnées, au plan des zx par exemple. Réciproquement tout plan perpendiculaire au plan des zx est plan de section circulaire pour des surfaces (Σ). En particulier, le plan double de la surface des ondes est plan de section circulaire pour des surfaces (Σ) et le centre de ces cercles est le point P.

D'après ce qui précède, pour un plan double la conique du complexe se réduit à un point double; en vertu du principe de dualité, pour un point double D le cône du complexe se réduira à un plan double. Le point double était sur le cercle de contact; le point double sera tangent au cône des tangentes. C'est le plan perpendiculaire à OD mené par D. Comme la droite OD est une focale du cône (11), la section du cône par le plan tangent comptant double admet le point D comme foyer. Pour le point D le cône du complexe (10) se décompose en deux plans dont l'un coïncide avec le plan tangent double. De même que la droite singulière relative à un point M quelconque pris sur le cercle de contact s'obtenait en joignant M au point comptant double P, la droite singulière relative à un plan tangent quelconque du cône des tangentes s'obtiendra en prenant l'intersection avec le plan comptant double. En effet, toutes les droites ainsi

obtenues sont bien perpendiculaires au rayon vecteur OD.

2. *Propriétés des droites singulières.* — Pour terminer cette seconde partie de la solution, j'insisterai sur deux propriétés très simples des droites singulières.

Il a été reconnu géométriquement que la droite singulière unique qui passe par le point M de la surface est la droite du plan tangent en M qui est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Cela résulte d'ailleurs aussi de la formule

$$(19) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Si l'on désigne par α, β, γ, α', β', γ' les coordonnées d'une droite singulière, de sorte que

$$(9) \qquad l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 - K(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

$$(10) \qquad l\alpha\alpha' + m\beta\beta' + n\gamma\gamma' = 0,$$

le complexe tangent est spécial, et représente une droite

$$l\alpha', \quad m\beta', \quad n\gamma', \quad -K\alpha, \quad -K\beta, \quad -K\gamma,$$

qui, d'après l'équation (10), est perpendiculaire à la droite singulière.

Ces deux droites rectangulaires peuvent facilement se définir géométriquement. Je citerai d'abord textuellement le *Traité d'Analyse* de M. Laurent (t. II, p. 291) :

« La surface des ondes étant représentée par

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + \ldots = 0,$$

si l'on fait

$$(5) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$$

$$(6) \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \mu,$$

$$a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2 = \lambda\mu + a^2b^2c^2,$$

l'équation (4) est satisfaite.... En résolvant les équa-

tions précédentes et en posant

$$\Delta = \sum b^2 c^2 (b^2 - c^2),$$

on trouve

$$x = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\Delta}} (\lambda - a^2)^{\frac{1}{2}} (\mu - b^2 c^2)^{\frac{1}{2}};$$

on peut constater que $\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0$, ce qui prouve que les courbes d'intersection de la surface des ondes avec les surfaces (5) et (6), où λ et μ sont constants, se rencontrent à angle droit. »

Il est clair que la tangente MT à toute courbe sphérique tracée sur la sphère (5) est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Les droites singulières ne sont donc pas autre chose que les tangentes aux courbes d'intersection des sphères (5) et de la surface des ondes. Ces courbes d'intersection sont des coniques sphériques, comme on le voit, en écrivant l'équation de la surface des ondes sous la forme

$$\frac{x^2}{l - \frac{K}{\lambda}} + \frac{y^2}{m - \frac{K}{\lambda}} + \frac{z^2}{n - \frac{K}{\lambda}} = 0.$$

Considérant λ comme un paramètre variable, on a les cônes homofocaux du cône (11), c'est-à-dire les cônes ayant pour focales les droites qui joignent le centre de la surface des ondes aux points doubles.

Les droites perpendiculaires aux droites singulières, dans le plan tangent à la surface des ondes, qui sont définies ici par le complexe tangent spécial, apparaîtront dans la fin de cette étude comme droites singulières du complexe des droites de même paramètre. Je pourrais me borner à renvoyer le lecteur à la *Géométrie analytique* de M. Pruvost, où il est prouvé que ces droites

sont tangentes à des lignes de courbure de quadriques, intersections de deux surfaces homofocales appartenant à une même famille. Conservant les notations de M. Laurent, voici comment je vérifie ces résultats. A la surface des ondes

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2-a^2}+\dfrac{y^2}{r^2-b^2}+\dfrac{z^2}{r^2-c^2}-1=0, \\ \lambda=r^2=x^2+y^2+z^2, \end{cases}$$

je fais correspondre la famille de surfaces homofocales

$$(7)\qquad \frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=0.$$

Pour un système de valeurs fixes de x, y, z, l'équation (7) donne trois valeurs ρ_1, ρ_2, ρ_3. Si l'on donne à ρ_3 la valeur $r^2 \equiv x^2+y^2+z^2$, le point (x, y, z) est sur la surface (4). Développant l'équation (7),

$$\begin{aligned} -\rho^3+\rho^2(r^2+a^2+b^2+c^2)& \\ -\rho[(b^2+c^2)x^2+\ldots+b^2c^2+\ldots]&=0, \end{aligned}$$

on a d'abord

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=r^2+a^2+b^2+c^2,$$

qui, par suite de $\rho_3=r^2$, donne

$$\rho_1+\rho_2=a^2+b^2+c^2.$$

La somme des deux racines ρ_1 et ρ_2 reste constante. On a ensuite

$$\begin{aligned} &\rho_3(\rho_1+\rho_2)+\rho_1\rho_2 \\ &\quad=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2x^2-\ldots+b^2c^2+\ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\lambda(a^2+b^2+c^2)+\rho_1\rho_2 \\ &\quad=(a^2+b^2+c^2)\lambda-\mu+b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\rho_1\rho_2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-\mu.$$

Si donc μ reste constant, les deux paramètres ρ_1 et ρ_2 sont déterminés ; on a l'intersection des deux surfaces de la famille (7) qui correspondent aux valeurs ρ_1 et ρ_2 du paramètre.

A cette propriété, purement géométrique, des droites singulières, j'en ajouterai une autre qui se rattache aux propriétés optiques de la surface des ondes. Je m'appuierai sur lesformu les démontrées par M. Sarrau (même Recueil, 3e série, t. VII, p. 551) :

« Désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'onde plane, par ω la vitesse de propagation, par p, q, r la direction de la vibration rectiligne, on a les équations

$$(91)\quad \begin{cases} (\omega^2 - e)p = -el\ (lp + mq + nr), \\ (\omega^2 - f)q = -fm(lp + mq + nr), \\ (\omega^2 - g)r = -gn(lp + mq + nr). \text{ »} \end{cases}$$

Il me suffira de rappeler comment je suis parvenu à la forme (35) d'équation de la surface des ondes pour obtenir la conclusion désirée. Mais, préalablement, je dois changer mes notations pour éviter toute confusion. J'écrirai l'équation du complexe

$$(9)\qquad A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2 - K(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

et le plan tangent en un point sera désigné par

$$ux + vy + wz + \omega = 0, \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

On élimine d'abord α, β, γ entre les équations

$$(21)\quad \begin{cases} \gamma' v - \beta' w = \alpha\omega, \\ \alpha' w - \gamma' u = \beta\omega, \\ \beta' u - \alpha' v = \gamma\omega. \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} -K(\gamma v - \beta w) = A\alpha'\omega, \\ -K(\alpha w - \gamma u) = B\beta'\omega, \\ -K(\beta u - \alpha v) = C\gamma'\omega. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\alpha'\left(\omega^2 - \frac{K}{A}\right) = -\frac{K}{A}\, u(u\alpha' + v\beta' + w\gamma'),$$

$$\beta'\left(\omega^2 - \frac{K}{B}\right) = -\frac{K}{B}\, v(u\alpha' + v\beta' + w\gamma'),$$

$$\gamma'\left(\omega^2 - \frac{K}{C}\right) = -\frac{K}{C}\, w(u\alpha' + v\beta' + w\gamma').$$

Ces équations, si l'on pose

$$\frac{K}{A} = e, \qquad \frac{K}{B} = f, \qquad \frac{K}{C} = g,$$

ne diffèrent des équations (91) que par les notations. La normale à l'onde plane est la normale u, v, w à la surface des ondes en M; la vitesse de propagation ω est la distance de l'origine au plan tangent en M; la direction de la vibration rectiligne est α', β', γ'. Or on sait que

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$$

est le plan qui passe par la droite α, β, γ, α', β', γ' et l'origine des coordonnées. La direction de la vibration est donc perpendiculaire au plan mené par l'origine et par la droite singulière. « Les deux racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(94) \qquad \frac{l^2}{\omega^2 - e} + \frac{m^2}{\omega^2 - f} + \frac{n^2}{\omega^2 - g} = 0,$$

qui coïncide avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel.

» A chacune de ses racines correspond une direction déterminée de la vibration, de sorte que, dans chaque direction se propagent, avec des vitesses différentes, deux ondes planes polarisées. »

Le résultat est très net. Si D et D' sont les deux points doubles réels de la surface, par chaque rayon vecteur OM

passent deux cônes ayant pour focales communes OD et OD'.

D'après les propriétés des coniques sphériques, les plans tangents à ces cônes le long de OM, lesquels passent, d'après ce qui précède, par les droites singulières, sont les plans bissecteurs des plans DOM, D'OM. Des normales à ces plans bissecteurs, droites de direction α', β', γ', sont les perpendiculaires menées à OM dans ces plans bissecteurs. Ce sont précisément les directions des deux rayons lumineux polarisés qui se propagent dans la direction OM.

Troisième Partie.

J'arrive maintenant à la recherche de la surface singulière en coordonnées de droites, et je n'aurai le plus souvent qu'à appliquer au complexe spécial traité ici les résultats généraux indiqués par M. Klein (*Mathematische Annalen,* zweiter Band, 1870). Je renverrai d'ailleurs à l'article cité pour toutes les propriétés géométriques qui ne trouveront pas place ici.

1. *Forme canonique.* — Je considère le complexe

$$(1)\qquad a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

$$(2)\qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Pour le ramener à la forme canonique de M. Klein, je remplace les six coordonnées α, β, γ, α', β', γ' par six autres x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 définies par

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt{a}\,x_1 = \alpha + ai\alpha', & i\sqrt{a}\,x_2 = \alpha - ai\alpha', \\ \sqrt{b}\,x_3 = \beta + bi\beta', & i\sqrt{b}\,x_4 = \beta - bi\beta', \\ \sqrt{c}\,x_5 = \gamma + ci\gamma', & i\sqrt{c}\,x_6 = \gamma - ci\gamma'. \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) sont remplacées par

$$(4)\qquad a(x_1^2-x_2^2)+b(x_3^2-x_4^2)+c(x_5^2-x_6^2)=0,$$
$$(5)\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=0.$$

Je rappellerai que l'équation (4) n'est qu'un cas particulier de la forme canonique relative au complexe du second degré le plus général,

$$(4\ bis)\quad k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2+k_4x_4^2+k_5x_5^2+k_6x_6^2=0.$$

Pour le complexe général (4 *bis*), la surface singulière est une surface de degré 4 et de classe 4, à 16 plans doubles et 16 points doubles, étudiée sous le nom de *surface de Kummer*.

Avec les coordonnées tétraédriques ordinaires qui correspondent à l'identité (2), le complexe général se ramène à la forme

$$\begin{aligned}A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+A'\alpha'^2+B'\beta'^2+C'\gamma'^2\\+2D\alpha\alpha'+2E\beta\beta'+2F\gamma\gamma'=0.\end{aligned}$$

Si les trois rectangles peuvent disparaître, c'est-à-dire si

$$D=E=F,$$

il serait facile de disposer des trois constantes g, h, k de manière que la transformation homographique

$$x=gX,\qquad y=hY,\qquad z=kZ$$

ramenât à la forme (1)

$$l\alpha'^2+m\beta'^2+n\gamma'^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=0.$$

Lorsque ce cas se présente,

$$D=E=F,$$

la surface singulière est ce que l'on appelle un *tétraédroïde*.

Je laisserai, d'ailleurs, complètement de côté ces questions plus générales pour me borner au complexe (1).

2. *Tangentes de la surface singulière.* — Le point singulier associé N est déterminé par la droite singulière $D(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ et par la droite $\Delta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$ que définit le complexe tangent spécial

$$\alpha_1 = a^2\alpha', \qquad \alpha'_1 = -\alpha.$$

Une tangente T à la surface singulière est une droite passant par le point N d'intersection de D et Δ dans le plan $D\Delta$. Je dis qu'elle a pour coordonnées

$$\lambda\alpha + \alpha_1, \quad \ldots, \quad \lambda\alpha' + \alpha'_1, \quad \ldots.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'on peut définir trois droites D, Δ, T satisfaisant aux conditions précédentes respectivement par

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \theta \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \theta \\ x' & y' & z' & t' \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \theta \\ \lambda x + x' & \lambda y + y' & \lambda z + z' & \lambda t + t' \end{pmatrix}.$$

La réciproque se démontre sans difficulté en supposant, bien entendu, que les droites D et Δ aient un point commun; le paramètre λ a une signification géométrique bien connue qui sera utilisée par la suite.

Si l'on effectue la transformation définie par les formules (3), les droites D et Δ prendront les coordonnées $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ et $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6$. On aura

$$\sqrt{a}\, x'_1 = a^2\alpha' - ai\alpha = -iax_1,$$

et, au lieu de $\lambda\alpha + \alpha_1$, on trouverait

$$\lambda x_1 + x'_1 = x_1(\lambda - ia).$$

Pour éviter les imaginaires, on posera $\lambda = -i\sigma$, et la

tangente T deviendra, en divisant les six coordonnées homogènes par $-i$,

$$(\sigma + a)x_1, \quad \ldots.$$

3. *Surface singulière.* — Je suivrai ici, pas à pas, le calcul de M. Klein. Le complexe général est représenté par

$$(4) \qquad k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 + k_5 x_5^2 + k_6 x_6^2 = 0,$$

$$(5) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les formules de transformation (3) permettent de vérifier que le complexe du premier ordre

$$\Sigma a_i x_i = 0$$

sera spécial quand on aura

$$\Sigma a_i^2 = 0.$$

Appliquant cette condition au complexe tangent

$$k_1 x_1 x'_1 + \ldots = 0,$$

on voit que les droites singulières seront définies par (4), (5) et

$$(6) \qquad k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + k_3^2 x_3^2 + k_4^2 x_4^2 + k_5^2 x_5^2 + k_6^2 x_6^2 = 0.$$

En vertu de (5), on peut altérer tous les coefficients du complexe (4) d'une même constante, et l'on obtient facilement

$$(4\ bis) \qquad (k_1 + \sigma)\, x_1^2 + (k_2 + \sigma)\, x_2^2 + \ldots = 0,$$

$$(5\ bis) \qquad x_1^2 + \ldots\ldots + x_2^2 + \ldots = 0,$$

$$(6\ bis) \qquad (k_1 + \sigma)^2 x_1^2 + (k_2 + \sigma)^2 x_2^2 + \ldots = 0.$$

Dans le complexe du concours, on doit prendre

$$k_1 = a, \qquad k_2 = -a, \qquad \ldots.$$

Si l'on prend $k_1 x_1$, $k_2 x_2$, ... pour coordonnées de la droite définie par le complexe spécial et que l'on dé-

signe par $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ les coordonnées d'une tangente T, on pourra poser

$$y_i = \sigma x_i + k_i x_i,$$

et, d'après la remarque faite au n° 2, on aura

$$\sigma = i\lambda,$$

λ ayant la signification géométrique indiquée.

Ayant $y_i = x_i(k_i + \sigma)$, on obtient

$$x_i = \frac{y_i}{k_i + \sigma},$$

et, portant dans les équations (6 *bis*), (4 *bis*) et (5),

$$(7) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 0,$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y_1^2}{k_1+\sigma} + \frac{y_2^2}{k_2+\sigma} + \frac{y_3^2}{k_3+\sigma} \\ &\qquad + \frac{y_4^2}{k_4+\sigma} + \frac{y_5^2}{k_5+\sigma} + \frac{y_6^2}{k_6+\sigma} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^2} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^2} + \frac{y_3^2}{(k_3+\sigma)^2} \\ &\qquad + \frac{y_4^2}{(k_4+\sigma)^2} + \frac{y_5^2}{(k_5+\sigma)^2} + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (7) apprend seulement que $y_1, y_2, \ldots$ sont les coordonnées d'une droite.

« L'équation (8) est du quatrième degré en σ. L'équation (9) apprend que la dérivée de (8) relativement à σ est nulle. L'équation en coordonnées de droite de la surface singulière est le discriminant de l'équation (8) pris par rapport à σ. Comme cela doit être, cette équation est de degré 12. »

4. *Faisceau de complexes.* — Cela fait, M. Klein énonce ce résultat très remarquable, que je me propose de démontrer directement.

« Si σ prend une valeur numérique déterminée, l'équation (8) représente un complexe du second degré. Ce complexe a même surface singulière que le complexe (4), car le système des équations (7), (8), (9) ne change pas si k_α est remplacé par $\frac{1}{k_\alpha + \sigma}$.

» L'équation (8) donne le système de complexes du second degré liés à la surface singulière. Cette équation est analogue à celle des surfaces homofocales du second degré. »

Laissant au lecteur le soin de vérifier que les équations (7), (8), (9) ne changent pas si l'on remplace k_α par $\frac{1}{k_\alpha + \sigma}$, je remarquerai que, éliminer σ entre (8) et (9), c'est chercher une équation qui soit vérifiée par les coordonnées des droites singulières de tous les complexes (8), car le complexe tangent de (8)

$$\frac{y_1 y'_1}{k_1 + \sigma} + \ldots = 0$$

n'est spécial que si l'équation (9) est vérifiée. Or, d'après le raisonnement primitif, toutes les droites vérifiant l'équation obtenue en éliminant σ entre (8) et (9) doivent être tangentes à la surface singulière de (4). Il faut donc que les droites singulières de tous les complexes (8) soient tangentes à la surface singulière de (4), ce qui exige que tous les complexes (8) aient même surface singulière.

Il reste à établir que tous les complexes du second ordre admettant la surface donnée comme surface singulière sont compris dans la formule (8). Pour cela, on remarque d'abord que, « si (y) est une droite donnée, l'équation (8) définit quatre complexes passant par la droite et admettant la surface donnée comme surface singulière ». Il suffit de prouver directement que l'on peut

construire quatre complexes du second ordre qui admettent une surface de Kummer donnée comme surface singulière, et qui passent en outre par une droite donnée. »

N'ayant pas à ma disposition les théorèmes généraux sur lesquels M. Klein s'appuie, je proposerai la démonstration suivante :

Soient A la droite donnée que je ne suppose pas tangente à la surface, et a_1, a_2, a_3, a_4 ses points d'intersection avec la surface. Si l'on imagine un complexe du second degré passant par A, il admettra en a_1 une droite singulière unique que j'appellerai D.

Je dis que le plan AD est tangent à la surface. En effet, d'après les propriétés des droites singulières, la section par le plan AD, si elle était indécomposable, serait tangente à D en a_1 ; comme la droite A doit être aussi tangente à la conique comme droite du complexe, cette conique se réduit évidemment à deux points, dont l'un est le point a_1. Le plan AD est tangent et non en a_1. Si l'on joint a_1 à son point de contact m_1, on aura la droite singulière relative à ce plan, qui rencontrera la surface en un point nouveau b_1 qui est le second point cherché. Le cône relatif au point b_1 comprenant déjà le plan AD doit passer par la droite singulière relative à b_1, qui se trouve alors déterminée.

La droite singulière étant déterminée en a_1 se trouvera, par cela même, déterminée en a_2, a_3 et a_4. En effet, j'ai remarqué que le plan tangent tourne régulièrement de 180° quand le sommet du cône décrit une droite A du complexe. Cela fixe les plans tangents à choisir en a_2, a_3, a_4 dès que le plan tangent en a_1 a été choisi. J'aurais d'ailleurs pu dire aussi que le rapport anharmonique des plans tangents en quatre points d'une génératrice du complexe était le même que celui des

quatre points correspondants, ce qui donne ce théorème connu :

Le rapport anharmonique des quatre plans tangents que l'on peut mener par une droite à une surface de Kummer est égal au rapport anharmonique des quatre points d'intersection de la droite avec la surface.

Les droites singulières en a_1, a_2, a_3, a_4 étant déterminées, on obtiendra un point b_1 donnant des génératrices $b_1 a_2$, $b_1 a_3$, $b_1 a_4$ du complexe, et de même des points b_2, b_3, b_4, en remplaçant successivement a_1 par a_2, a_3, a_4.

Je dis que le cône du complexe relatif à tout point a de la droite A est déterminé. On lui connaît, en effet, cinq génératrices distinctes A, ab_1, ab_2, ab_3, ab_4.

La même chose a lieu pour les droites $b_1 a_2$, $b_1 a_3$, $b_1 a_4$, ..., c'est-à-dire pour douze nouvelles droites.

Cela posé, si l'on veut déterminer la conique du complexe située dans un plan quelconque, on déterminera l'intersection à distance finie ou infinie du plan donné avec la droite A et les douze droites auxquelles on pourrait adjoindre les droites joignant a_1, a_3, a_4 aux deux nouveaux points de rencontre de $b_1 a_2$ avec la surface, etc. Si a est l'intersection avec A, le cône de sommet a étant déterminé, les deux génératrices suivant lesquelles il est coupé par le plan sont deux tangentes à la conique cherchée. J'obtiens donc au moins vingt-six tangentes pour déterminer la conique, ce qui est plus que suffisant.

La conique relative à un plan quelconque étant déterminée, pour obtenir un cône de sommet S, il suffit de faire passer trois plans par ce point et de mener les six tangentes aux coniques déterminées par les trois plans.

En résumé, la droite D étant choisie, le complexe est

parfaitement déterminé. Or, la droite D étant l'intersection du plan tangent en a_1 avec l'un des quatre plans menés par A, on aura en général quatre solutions distinctes.

On peut facilement ajouter ce théorème :

Quand une surface de Kummer est donnée ainsi qu'une droite tangente, on peut construire, et d'une seule manière, un complexe du second degré qui admette la surface comme surface singulière, et la droite comme ligne droite singulière.

En effet, soit D la tangente donnée. Je mène par la droite D un quelconque des deux plans tangents dont le point de contact ne soit pas le point de contact de D avec la surface. Toute droite A située dans ce plan et passant par le point de contact de D avec la surface doit appartenir au complexe, qui est parfaitement déterminé, puisqu'on connaît une droite A et la droite singulière D en un des points a_1 où A rencontre la surface.

L'équation générale (8) nous montre en outre ce résultat curieux, que si l'on part du complexe (4) et qu'on prenne en un point M de la surface la tangente T qui divise l'angle DΔ dans un rapport déterminé par le paramètre λ, ce rapport se maintiendra constant en tout point de la surface. En général, étant donnés quatre complexes du faisceau dont les droites singulières forment un rapport anharmonique R en un point particulier M de la surface singulière, on peut affirmer que ce rapport anharmonique se trouvera invariable en tout autre point de la surface.

5. *Cas particulier.* — Pour le complexe étudié ici

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_3^2 - x_4^2) + c(x_5^2 - x_6^2) = 0,$$

le faisceau se réduit à

$$\frac{x_1^2}{a+\sigma}+\frac{x_2^2}{-a+\sigma}+\ldots=0$$

et, en revenant aux α, β, γ, α', β', γ' par les formules (3),

$$\frac{(\alpha+ai\alpha')^2}{a(a+\sigma)}+\frac{-(\alpha-ai\alpha')^2}{a(-a+\sigma)}+\ldots=0.$$

Les deux premiers termes donnent, en les ajoutant,

$$\frac{1}{a}\,\frac{4ai\sigma\alpha\alpha'-2a(\alpha^2-a^2\alpha'^2)}{\sigma^2-a^2},$$

et, en remplaçant σi par λ, comme on devait s'y attendre, on trouve

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{2\lambda\alpha\alpha'+a^2\alpha'^2-\alpha^2}{\lambda^2+a^2}+\frac{2\lambda\beta\beta'+b^2\beta'^2-\beta^2}{\lambda^2+b^2}\\&\qquad+\frac{2\lambda\gamma\gamma'+c^2\gamma'^2-\gamma^2}{\lambda^2+c^2}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0.$$

Pour que l'on puisse faire disparaître les rectangles, il faut et il suffit que

$$\frac{\lambda}{\lambda^2+a^2}=\frac{\lambda}{\lambda^2+b^2}=\frac{\lambda}{\lambda^2+c^2},$$

ce qui, en supposant a, b et c différents, ne donne que deux solutions $\lambda=0$ et $\lambda=\infty$. Or, comme on va le voir en développant l'équation (10), les deux complexes particuliers que l'on trouve ainsi sont, d'une part le complexe étudié ici, d'autre part le complexe des droites de même paramètre. D'après la signification de λ, on voit que les droites singulières de ces deux complexes, correspondant au même point de la surface des ondes, sont rectangulaires. D'une manière plus complète, en un point M

de la surface des ondes, il existe une droite singulière D pour notre complexe; le complexe spécial tangent définit une perpendiculaire Δ à D. Si l'on passe au complexe des droites de même paramètre, D et Δ s'intervertissent.

Développant, on trouve

$$\lambda^4(a^2\alpha'^2+\ldots-\alpha^2\ldots)+2\lambda^3[(b^2+c^2)\alpha\alpha'\ldots]$$
$$+\lambda^2[(b^2+c^2)(a^2\alpha'^2-\alpha^2)\ldots]$$
$$+2\lambda[b^2c^2\alpha\alpha'+\ldots]$$
$$+[b^2c^2(a^2\alpha'^2-\alpha^2)+\ldots]=0.$$

On a d'ailleurs

$$(b^2+c^2)\alpha\alpha'+\ldots=-a^2\alpha\alpha'-b^2\beta\beta'-c^2\gamma\gamma',$$
$$b^2c^2(a^2\alpha'^2-\alpha^2)+\ldots$$
$$=\frac{1}{a^2b^2c^2}\left(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$
$$b^2c^2\alpha\alpha'+\ldots=\frac{1}{a^2b^2c^2}\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}\right).$$

On voit que, si la droite donnée est sur le complexe étudié ici, l'équation en λ a une racine infinie; si la droite donnée est droite singulière sur le complexe, on a deux racines infinies.

D'ailleurs, il ne faut pas oublier que les coefficients a^2, b^2, c^2 des complexes ne sont nullement les carrés des demi-axes des surfaces du second degré qui ont servi à définir les deux complexes remarquables dont il s'agit.

6. *Théorème final.* — Soit le faisceau général

$$\frac{x_1^2}{k_1+\sigma}+\frac{x_2^2}{k_2+\sigma}+\ldots=0. \tag{8}$$

Les droites singulières relatives à un complexe du faisceau ne dépendent que de deux paramètres. L'équation (8) va permettre de les exprimer effectivement en fonction de deux paramètres.

Je puis toujours faire correspondre le complexe considéré à la valeur o du paramètre σ. Pour toute droite singulière de ce complexe, l'équation (8) aura, outre deux racines nulles, deux racines que je désigne par ρ et ρ_1. On a identiquement, en désignant par c un paramètre qu'il est inutile de déterminer,

$$\sum \frac{x_i^2}{k_i + \sigma} = c\,\frac{(\rho - \sigma)(\rho_1 - \sigma)\sigma^2}{(k_1 + \sigma)(k_2 + \sigma)\ldots(k_6 + \sigma)},$$

d'où, en faisant successivement $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$, ...,

$$x_1^2 = A_1(\rho - k_1)(\rho_1 - k_1),$$
$$x_2^2 = A_2(\rho - k_2)(\rho_1 - k_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, de là résulte (Darboux, *Leçons sur les surfaces*, t. I, p. 142) que les six coordonnées homogènes de la droite satisfont à l'équation

$$(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0.$$

Cette équation différentielle est précisément celle que M. Darboux désigne par la notation (t. II, p. 70)

$$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Il me suffit maintenant de citer le résultat suivant, démontré par M. Darboux (t. II, p. 345) :

« Soient (G) une congruence de droites, (Σ) et (Σ_1) les deux nappes de sa surface focale :

» La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (Σ), (Σ_1) est que les six coordonnées de chaque droite de la congruence, qui sont fonctions de deux paramètres variables, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. »

D'une manière plus générale, on peut considérer la congruence formée par les droites communes à deux complexes du faisceau. Si l'on substitue dans (8) les coordonnées d'une pareille droite, deux racines de l'équation en σ sont connues, et, en désignant les deux autres par ρ et ρ_1, le calcul précédent subsiste sans modification. Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FRACTIONS DÉGAGÉE DE TOUTE CONSIDÉRATION IMPLIQUANT SOIT LA SUBDIVISION DE L'UNITÉ ABSTRAITE, SOIT L'INTERVENTION DES GRANDEURS CONCRÈTES. — SON APPLICATION A LA SPÉCIFICATION MATHÉMATIQUE DE CES DERNIÈRES.

Extrait de *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (¹);

Par M. Ch. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon,

Avec la collaboration de M. Ch. RIQUIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Dans les Traités d'Arithmétique, les fractions sont présentées tantôt comme des sommes de parties aliquotes de l'unité abstraite, ce qui est inintelligible, tantôt comme des mesures numériques de grandeurs qui ne sont pas des multiples exacts de leurs unités.

De cette dernière manière, il est vrai, les élèves aperçoivent immédiatement ce qu'il faut entendre par $\frac{3}{4}$ *de mètre*, $\frac{5}{7}$ *de minute*, etc., mais ils ne conçoivent qu'à la longue et empirique-

(¹) En préparation.

ment, c'est-à-dire sans pouvoir jamais expliquer le fond des choses aussi clairement qu'ils le voudraient, à eux-mêmes ou à autrui, ce que sont $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, *abstraction faite de toute mensuration physique,* ce qu'il y a sous les signes

$$\frac{3}{4}\pm\frac{5}{7},\quad \frac{3}{4}\times\frac{5}{7},\quad \frac{3}{4}:\frac{5}{7},\quad \ldots.$$

Là d'ailleurs, comme dans d'autres parties de l'Analyse pure, il y aurait à critiquer l'intervention des grandeurs concrètes; car la science des nombres abstraits ne peut acquérir une clarté et une unité complètes sans l'exclusion rigoureuse de toute considération étrangère.

La théorie suivante semble ne rien laisser à désirer sous le rapport de la simplicité et de son aptitude à succéder d'une manière tout à fait naturelle à celle des nombres entiers.

....

3. Les nombres entiers de l'Arithmétique élémentaire, sur lesquels roulent exclusivement en définitive toutes les opérations exigées par les applications numériques, sont les seuls aussi qui interviennent au fond des spéculations théoriques; mais l'impossibilité fréquente de certaines opérations troublerait gravement l'uniformité désirable dans le mécanisme des transformations analytiques et compliquerait les énoncés de restrictions continuelles, si l'on ne tournait l'obstacle en substituant aux nombres et aux opérations véritables des fictions pour lesquelles l'impossibilité correspondante ne se présente jamais et d'où, quand il le faut, on revient à la réalité sans aucun effort.

Telle est, en particulier, l'origine des fractions, dont la conception supprime les difficultés de forme qui, autrement, naîtraient de l'impossibilité d'exécuter toutes les divisions (de nombres entiers).

4. *Le résultat de l'opération composée consistant à multiplier un entier donné* E *par un second nombre n,*

puis à diviser le produit par un troisième d (non $=0$) (cette division étant supposée possible), peut aussi bien être obtenu, suivant les circonstances :

1° *Si* E *est divisible par d, en faisant cette division et multipliant le quotient obtenu par n;*

2° *Si n est divisible par d, en faisant la division et en multipliant* E *par le quotient obtenu.*

On conçoit que ce dernier mécanisme de l'opération considérée puisse être quelquefois préférable aux deux autres, soit en rendant plus nette la conception du résultat, soit en facilitant ses combinaisons ultérieures avec d'autres nombres, etc.

Pour en conserver les avantages quand n n'est pas divisible par d, on convient de représenter même alors le résultat de l'opération ci-dessus par le signe

$$\text{(1)} \qquad E \times \frac{n}{d} \qquad \left(\text{ou} \quad \frac{n}{d} \times E\right),$$

propre au cas où n est divisible par d, en lui laissant le nom de produit du nombre E *par le* facteur *fictif* $\frac{n}{d}$.

Ces facteurs fictifs, dont les combinaisons sont soumises à un ensemble de règles que nous allons exposer rapidement, sont précisément les *nombres fractionnaires ou fractions.*

Comme le mode (1°) d'exécuter l'opération composée dont nous parlons conduit à en appeler le résultat les *n d*ièmes de E, il est naturel d'appeler la fraction $\frac{n}{d}$ aussi bien *n d*ièmes que *n sur d*; d'où les noms de *numérateur* et *dénominateur* donnés à ses deux *termes n*, *d* respectivement, *dont le second doit être essentiellement supposé différent de* 0.

5. *Si la comparaison des produits des deux fractions* $\frac{n'}{d'}$, $\frac{n''}{d''}$ *par un seul entier* E *non* = 0 *donne lieu à l'une des relations*

$$E\frac{n'}{d'} \overset{>}{\underset{<}{=}} E\frac{n''}{d''},$$

la même relation aura lieu entre les produits des mêmes fractions par tout autre entier (*non* = 0, *pour la première et la dernière*), *pourvu, bien entendu, que ces multiplications fictives soient toutes exécutables* (4).

On exprime, en conséquence, la corrélation constante existant à ce point de vue entre les deux fractions dont il s'agit en disant, selon le cas, que la *valeur* de la première est *supérieure, égale* ou *inférieure* à celle de la seconde, et en écrivant comme d'habitude

$$\frac{n'}{d'} \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{n''}{d''}. \tag{2}$$

Pour qu'il existe entre ces fractions l'une de ces relations fictives, il faut et il suffit qu'il existe entre leurs termes celle semblable dans le tableau

$$n'd'' \overset{>}{\underset{<}{=}} n''d'.$$

En particulier, *quand deux fractions ont même dénominateur, leur relation d'égalité ou d'inégalité est celle même existant entre leurs numérateurs.*

Quand elles ont même numérateur non = 0, *leur égalité entraîne celle de leurs dénominateurs, et leur inégalité celle de sens contraire entre ces derniers nombres.*

6. *En multipliant les deux termes d'une fraction par un même nombre, ou en les divisant par quelque diviseur commun, on obtient une fraction égale.*

Car les termes des fractions $\frac{n}{d}$, $\frac{kn}{kd}$, par exemple, donnent évidemment

$$n.kd = kn.d.$$

On exprime encore la même chose en disant qu'*une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou divise par un même nombre ses deux termes à la fois.* D'où la distinction évidente et essentielle à faire entre la *valeur* et la *forme* d'une fraction donnée.

Quand les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, aucune autre ne peut lui être égale, à moins que les siens ne soient respectivement des équimultiples de ceux de la proposée, et, par suite, qu'ils ne leur soient au moins égaux.

On *réduit* donc une fraction donnée à sa forme ou *expression la plus simple*, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur; on suppose habituellement cette réduction effectuée quand on ne fait pas mention du contraire.

7. *Des fractions quelconques*

$$\frac{n'}{d'}, \quad \frac{n''}{d''}, \quad \frac{n'''}{d'''}, \quad \dots$$

étant données, on les réduit au même dénominateur, c'est-à-dire on leur donne, sans changer leurs valeurs, les formes nouvelles

$$(3) \qquad \frac{N'}{D'}, \quad \frac{N''}{D''}, \quad \frac{N'''}{D'''}, \quad \dots,$$

dont les dénominateurs sont égaux, en multipliant les deux termes de chacune des fractions proposées respectivement par les quotients obtenus en divisant par d', d'', d''', ..., *successivement, quelque multiple commun* M *de ces dénominateurs primitifs.*

On obtiendrait les valeurs minima des termes des nouvelles fractions (3) en réduisant préalablement les proposées à leurs plus simples expressions et prenant ensuite pour M le plus petit commun multiple de leur dénominateur.

8. *Les opérations indiquées par*

$$\mathrm{E}\,\frac{n'}{d'},\quad \mathrm{E}\,\frac{n''}{d''},\quad \mathrm{E}\,\frac{n'''}{d'''},\quad \ldots$$

étant supposées possibles, la combinaison de leurs résultats par voie d'addition et de soustraction

(4) $$\mathrm{E}\,\frac{n'}{d'} \pm \mathrm{E}\,\frac{n''}{d''} \pm \mathrm{E}\,\frac{n'''}{d'''} \pm \ldots$$

donne un nombre qui, quel que soit E, *peut aussi être obtenu en multipliant cet entier par une seule fraction.*

Si les fractions données

(5) $$\frac{n'}{d'},\quad \frac{n''}{d''},\quad \frac{n'''}{d'''},\quad \ldots$$

sont les fractions (3) à même dénominateur, il vient immédiatement (4)

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\,\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}'} \pm \mathrm{E}\,\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{D}''} \pm \mathrm{E}\,\frac{\mathrm{N}'''}{\mathrm{D}'''} \pm \ldots \\ &\quad = \frac{\mathrm{EN}' \pm \mathrm{EN}'' \pm \mathrm{EN}''' \pm \ldots}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}' \pm \mathrm{N}'' \pm \mathrm{N}''' \pm \ldots)}{\mathrm{D}} \\ &\quad = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}' \pm \mathrm{N}'' \pm \mathrm{N}''' \pm \ldots}{\mathrm{D}}\right). \end{aligned}$$

Sinon, on les réduira au même dénominateur (7) avant de raisonner de cette manière.

Toute autre fraction dont le produit par E *est égal au nombre composé* (4) *est égale à celle que nous venons d'obtenir.* Car, par définition (5), l'égalité de

deux fractions est précisément leur propriété relative de donner des produits égaux quand on les multiplie par un même nombre.

La fraction constante en valeur, sinon en forme, dont la multiplication par E reproduit ainsi le nombre (4), se nomme *le résultat de la combinaison des fractions données* (5) *par les mêmes additions et soustractions*, et se représente par le signe habituel

$$\frac{n'}{d'} \pm \frac{n''}{d''} \pm \frac{n'''}{d'''} \pm \ldots$$

Pour en trouver une forme, il suffit, comme on l'a vu implicitement ci-dessus, de réduire les fractions proposées au même dénominateur, puis de construire la fraction ayant ce dénominateur commun avec la somme ou différence analogue des numérateurs des fractions transformées pour numérateur.

9. *Si les opérations*

$$\mathrm{E}\frac{n'}{d'}, \quad \left(\mathrm{E}\frac{n'}{d'}\right) \times \frac{n''}{d''}$$

sont possibles, le résultat de la dernière, égal évidemment à

$$\mathrm{E}\frac{n'n''}{d'd''},$$

peut ainsi s'obtenir en multipliant E *par la fraction unique* $\frac{n'n''}{d'd''}$. Cette dernière, dont la loi de formation est évidente, s'appelle, par convention, le *produit* des fractions $\frac{n'}{d'}$, $\frac{n''}{d''}$.

Cette définition conduit immédiatement à celle, plus générale, du *produit* $\frac{n'n''n'''\ldots}{d'd''d'''\ldots}$ des fractions $\frac{n'}{d'}$, $\frac{n''}{d''}$, $\frac{n'''}{d'''}$, $\cdots$ données en nombre quelconque.

10. *Étant données deux fractions quelconques*

$$\frac{N}{D}, \quad \frac{n}{d},$$

dont cependant la seconde n'a pas o *pour numérateur, il en existe certainement quelque autre dont le produit par la seconde* (9) *régénère la première.*

En appelant x, y le numérateur et le dénominateur de la fraction cherchée, on veut avoir

$$\frac{nx}{dy} = \frac{N}{D}.$$

La multiplication simultanée des deux membres par $\frac{d}{n}$, fraction qui existe certainement à cause de n non $=$ o, donne, après réduction du premier (9), (6),

$$\frac{x}{y} = \frac{Nd}{Dn},$$

fraction qui, d'ailleurs, satisfait évidemment à la condition voulue et qu'on nomme le *quotient de la division de* $\frac{N}{D}$ *par* $\frac{n}{d}$.

11. *Une même combinaison quelconque des opérations élémentaires ci-dessus définies, exécutée d'abord sur des fractions données, puis sur d'autres quelconques qui leur sont respectivement égales, donne deux résultats qui sont toujours égaux entre eux.*

En d'autres termes, *la valeur du résultat, sinon sa forme, dépend exclusivement des valeurs des données et nullement de leurs formes.*

L'exactitude de cette observation générale se vérifie sans peine; jointe à quelques remarques particulières faites antérieurement, elle attribue à chaque fraction, au point de vue de ce que nous en avons appelé sa *valeur*,

une individualité constante indépendante de la *forme* qu'elle peut revêtir.

12. *Si l'entier* R *est le résultat d'un ensemble donné quelconque d'opérations arithmétiques exécutées sur les entiers* e', e'', ... (*additions, multiplications, soustractions et divisions, ces dernières essentiellement supposées possibles*), *le résultat des opérations fictives de noms identiques dans la théorie des fractions, exécutées parallèlement sur les fractions correspondantes* $\frac{e'}{1}$, $\frac{e''}{1}$, ... *sera précisément la fraction* $\frac{R}{1}$ (*sous cette forme ou sous une autre*).

Pour effectuer un calcul arithmétique quelconque sur des entiers, on pourra donc tout aussi bien : 1° *prendre ceux-ci pour numérateurs de fractions ayant toutes* 1 *pour dénominateur commun;* 2° *substituer au calcul proprement dit donné le calcul fictif de même dénomination exécuté sur ces fractions;* 3° *chercher le numérateur du résultat réduit à sa plus simple expression.*

C'est cette double substitution de nombres fractionnaires aux nombres entiers, d'opérations fractionnaires à celles de l'Arithmétique, que l'on opère à chaque instant dans les calculs, et cela d'une manière qui devient bientôt inconsciente. Comme une division de fractions est toujours praticable [quand le numérateur du diviseur n'est pas nul (10)], cette assimilation procure en théorie l'immense avantage qu'*aucune division impossible ne peut désormais entraver la transformation d'un groupe d'opérations données en tel autre équivalent qui faciliterait la conception et la généralisation des résultats auxquels conduit l'étude de la question traitée.*

Un autre avantage, également très appréciable, consiste en ce qu'*on peut à volonté substituer l'une à*

l'autre la multiplication et la division, à cause de

$$\frac{n'}{d'}\cdot\frac{n''}{d''}=\frac{n'}{d'}:\frac{d''}{n''}\quad (10).$$

13. D'après tout cela, *les combinaisons opératoires des fractions* $\frac{n'}{d'}$, $\frac{n''}{d''}$, $\cdots$ *avec des entiers* e', e'', ... *seront les combinaisons fractionnaires homonymes de toutes les fractions*

$$\frac{n'}{d'},\quad \frac{n''}{d''},\quad \ldots,\quad \frac{e'}{1},\quad \frac{e''}{1},\quad \ldots.$$

De très légères modifications dans les énoncés permettent alors d'éviter toute allusion au dénominateur 1 à apposer sous les entiers e', e'', ... pour les transformer en fractions, et de créer le langage propre aux combinaisons de cette espèce. Dire, par exemple, qu'*on multiplie ou qu'on divise* $\frac{n}{d}$ *par* e *en multipliant le numérateur ou le dénominateur par* e, c'est énoncer dans ce langage spécial ces faits résultant de nos définitions, que le produit et le quotient de $\frac{n}{d}$ par $\frac{e}{1}$ sont

$$\frac{n.e}{d.1}=\frac{ne}{d}\qquad \text{et}\qquad \frac{n.1}{d.e}=\frac{n}{de}.$$

La fraction $\frac{0}{d}$ est dite *nulle* parce que sa forme réduite est $\frac{0}{1}$, que l'on convient d'identifier à son numérateur 0.

14. Les nombres fractionnaires et les entiers, ceux-ci assimilés aux premiers, comme nous venons de l'expliquer, sont confondus sous le nom de *quantités ou nombres absolus,* quand on les oppose aux quantités fictives dont nous parlerons dans le paragraphe suivant, de quan-

tités ou nombres *commensurables*, par opposition à celles qui seront étudiées dans le prochain Chapitre.

A la théorie sommaire que nous venons d'en présenter nous ajouterons seulement les observations générales qui suivent :

I. *Pour qu'un produit de pareilles quantités soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un au moins des facteurs le soit lui-même.*

Il faut effectivement et il suffit que l'entier servant de numérateur au produit soit nul et, par suite, que quelques-uns des numérateurs des facteurs dont il est le produit (9) le soit lui-même.

II. *Quand le diviseur est nul, mais non le dividende, la division est impossible. Quand ils s'évanouissent tous deux, le quotient est absolument indéterminé.*

III. *Une quantité non nulle quelconque étant donnée, on peut toujours en assigner d'autres qui lui soient inférieures.* Pour en obtenir de telles, il suffit effectivement d'augmenter arbitrairement le dénominateur de la proposée ou bien de diminuer son numérateur quand il est >1.

IV. *Entre deux quantités inégales on peut en insérer d'autres dont deux consécutives quelconques aient une différence inférieure à telle quantité qu'il aura plu de choisir.* Plus brièvement : *le passage de l'une à l'autre peut s'effectuer par des variations successives aussi faibles qu'on le veut.*

. . . .

(A). Notre conception des fractions abstraites n'a d'ailleurs rien de gênant dans la théorie générale des mesures des grandeurs concrètes.

Pour que des grandeurs d'une même espèce donnée (ou longueurs, ou aires, ou volumes, ou temps, etc.) soient suscepti-

bles d'être comparées numériquement, il faut que, pour elles, on ait pu définir :

L'*égalité* de deux d'entre elles (possibilité de leur coïncidence);

La *somme* de plusieurs (résultat de leur juxtaposition extérieure);

L'*inégalité* de l'une à l'autre;

L'*excès* d'une quelconque sur une plus petite (reste d'une ablation), tous ces mots étant ainsi pris dans un sens essentiellement physique et non arithmétique).

Il faut en outre être autorisé à affirmer :

Que toute relation d'égalité ou d'inégalité existant entre une première et une seconde d'une part, entre celle-ci et une troisième d'autre part, subsiste entre la première et la troisième;

Qu'en en combinant plusieurs par voie d'additions et soustractions consécutives, le résultat est indépendant tant de l'ordre suivi, que des groupements qu'on a pu opérer préalablement entre elles en exécutant partiellement ces additions et soustractions;

Qu'une quelconque est sécable en tout nombre n de parties égales entre elles, c'est-à-dire qu'on peut, au moins théoriquement, en construire la $n^{\text{ième}}$ partie;

Que le résultat de toute combinaison de plusieurs par les procédés ci-dessus mentionnés reste égal à ce qu'il était auparavant, quand on remplace ces grandeurs par d'autres qui leur sont respectivement égales, par exemple que les $n^{\text{ièmes}}$ parties de deux grandeurs égales le sont aussi l'une à l'autre; etc.

Les théorèmes fondamentaux qui suivent sont des conséquences immédiates de ces définitions et axiomes :

(B). *Quand deux grandeurs sont sécables respectivement en m, n fragments tous égaux entre eux, elles le sont aussi en $k\mu$, $k\nu$, si l'on a représenté par μ, ν les quotients des entiers m, n divisés par leur plus grand commun diviseur et par k un entier tout à fait arbitraire. Inversement, si elles le sont en* M, N, *on aura nécessairement*

$$M = k\mu, \qquad N = k\nu,$$

k désignant maintenant quelque entier assignable.

Quand deux grandeurs similaires sont *commensurables*, c'est-à-dire susceptibles de quelque pareil mode de section simultanée, on peut donc effectuer cette section d'une infinité d'autres manières. *Mais les fractions abstraites qui, dans chaque mode, ont pour numérateur et pour dénominateur les nombres de fragments de la première grandeur et de la seconde respectivement, sont toutes égales entre elles* (6); *de plus, les termes d'une fraction quelconque égale à celles-ci fournissent les nombres caractéristiques d'un mode de section simultanée semblable qui est essentiellement réalisable.*

La valeur commune de toutes ces fractions est par définition le *rapport* de la première grandeur à la seconde; pour la *forme* du rapport, on prendra de préférence celle qui est irréductible (6).

(C). *Si*

$$\frac{m'}{n'},\quad \frac{m''}{n''},\quad \frac{m'''}{n'''},\quad \ldots \tag{6}$$

sont les rapports de plusieurs grandeurs à une même autre, la fraction abstraite, résultat des additions et soustractions arithmétiques

$$\frac{m'}{n'} \pm \frac{m''}{n''} \pm \frac{m'''}{n'''} \pm \ldots$$

est précisément le rapport à la dernière grandeur, du résultat des opérations physiques de mêmes noms, exécutées parallèlement sur les premières.

Supposons d'abord égaux entre eux tous les dénominateurs $n', n'', n''', \ldots$ et soit n leur valeur commune. Les première, deuxième, troisième, ... grandeurs sont des sommes physiques de $n^{\text{ièmes}}$ parties de la dernière, prises en nombres égaux à $m', m'', m''', \ldots$ respectivement. Le résultat des additions et soustractions physiques à exécuter sur les premières grandeurs considérées est donc égal à une somme de $n^{\text{ièmes}}$ parties de la dernière prises en nombre égal à $m' \pm m'' \pm m''' \pm \ldots$, puisque, pour l'exécution de pareilles opérations, on admet l'indifférence tant de l'ordre de succession des grandeurs que des groupements partiels qu'on peut en faire préalablement (A). En

d'autres termes, la fraction abstraite

$$\frac{m' \pm m'' \pm m''' \pm \ldots}{n}$$

est bien le rapport à la dernière grandeur, du résultat des opérations physiques exécutées sur les premières.

Le cas où les dénominateurs sont inégaux se ramène immédiatement à celui-ci par la substitution aux formes données des rapports (6), de celles où ils offrent même dénominateur (7), (B), (8).

(D). *Si les rapports de deux grandeurs à une même troisième sont*

$$\frac{m'}{n'}, \quad \frac{m''}{n''}$$

respectivement, celui de la première à la seconde est le quotient obtenu en divisant la première de ces fractions abstraites par la seconde.

A ces deux rapports on peut (B) donner aussi les formes

$$\frac{m'n''}{n'n''}, \quad \frac{m''n'}{n'n''}.$$

Ainsi donc la section physique de la première grandeur en $m'n''$ parties égales, de la seconde en $m''n'$ (et aussi de la troisième en $n'n''$) donnera des fragments tous égaux les uns aux autres. Le rapport de la première à la seconde est donc

$$\frac{m'n''}{n'm''},$$

c'est-à-dire précisément le quotient dont il s'agit (10).

A cause de cela, le même mot *rapport* est appliqué aussi, en Arithmétique pure, à la désignation du quotient de la division de deux fractions abstraites.

(E). Cette individualité constante des rapports de plusieurs grandeurs similaires à une même autre commensurable avec elles toutes, ce parallélisme parfait entre l'addition, la soustraction arithmétiques de ces rapports et les opérations homo-

nymes exécutées physiquement sur les grandeurs correspondantes, conduisent à adopter un même étalon et à spécifier mathématiquement toutes les grandeurs commensurables avec lui, par les fractions arithmétiques constituant leurs divers rapports à l'étalon choisi.

Comme toute grandeur égale à l'étalon a avec lui le rapport $\frac{1}{1}$, il sera spécifié lui-même par cette fraction, ou bien par l'entier 1 en vertu de l'identification conventionnelle de la fraction $\frac{n}{1}$ avec l'entier n (13). D'où le nom d'*unité* (concrète) donné à l'étalon, celui de *mesure* d'une grandeur, à son rapport avec l'étalon.

(F). *Si à l'étalon primitivement choisi on en substitue un autre ayant* μ *pour mesure* (*relativement à lui*), *les grandeurs qui étaient mesurées par les fractions* μ', μ'', μ''', ... *le seront par les quotients*

$$\mu' : \mu, \quad \mu'' : \mu, \quad \mu''' : \mu, \quad \ldots, \quad (D).$$

L'extension de la notion de rapport, à deux grandeurs qui *théoriquement* ne sont pas commensurables, par suite la généralisation complète de celle de mesure, exigerait sur les *nombres abstraits commensurables* quelques développements qui sortiraient du cadre naturel de cette Note. *Pratiquement* d'ailleurs, deux grandeurs similaires sont toujours commensurables ; car, pour nos sens, toute grandeur est une somme de quelques autres égales entre elles, pourvu que la petitesse de celles-ci rende imperceptible toute grandeur moindre.

SUR DEUX THÉORÈMES CURIEUX SIGNALÉS PAR M. POINCARÉ;

PAR M. ANDRADEZ.

Dans deux Notes des *Comptes rendus* (années 1887 et 1888), M. Poincaré a entrepris de démontrer l'existence des fonctions fondamentales sur lesquelles repose

la solution du problème du refroidissement d'un corps isotrope plongé dans un milieu indéfini ayant une température donnée, o° si l'on veut.

A chacune de ces fonctions U se rattache un coefficient positif K, qu'on peut définir de la manière suivante :

F désignant une fonction de point définie à l'intérieur du corps, si l'on se donne l'intégrale de volume $\int F^2 d\tau$; par exemple, si l'on fait $\int F^2 d\tau = 1$, puis si l'on cherche le minimum de l'intégrale composée

$$(1) \qquad h\int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

dont la première est étendue à la surface du corps et la seconde à son volume et dans laquelle h est la constante positive qui dépend du pouvoir émissif du corps et qui détermine le flux de chaleur à la surface de ce corps, on trouve immédiatement, par la règle d'Euler, que la fonction U_1 qui réalise ce minimum satisfait aux équations suivantes (notations ordinaires du potentiel)

$$\begin{cases} \Delta U_1 + K_1 U_1 = 0, & \text{en chaque point du volume,} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial n} + hU_1 = 0, & \text{en chaque point de la surface,} \end{cases}$$

et la constante K_1 est le minimum de l'intégrale composée étudiée.

Voici maintenant la loi de récurrence qui donne les fonctions des divers ordres $U_1, U_2, \ldots, U_i$.

Les fonctions précédentes étant supposées formées, on envisage une fonction F assujettie aux conditions suivantes

$$\int F^2 d\tau = 1, \qquad \int FU_1 d\tau = 0,$$
$$\int FU_2 d\tau = 0, \qquad \ldots, \qquad \int FU_{i-1} d\tau = 0;$$

la fonction F, pour laquelle l'intégrale composée (1)

sera minima, est la nouvelle fonction U_i qui vérifie encore les équations

$$\begin{cases} \Delta U_i + K_i U_i = 0, \\ \dfrac{\partial U_i}{\partial n} + h U_i = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles K_i désigne encore le minimum cherché.

Il résulte de là que les K_i vont en diminuant, quand leur ordre i croît. M. Poincaré a de plus démontré qu'ils décroissent indéfiniment.

Sa démonstration, fondée d'abord dans le cas d'un solide convexe et de $h = 0$, sur une transformation d'intégrale multiple et sur une nouvelle définition de K_2, s'étend au cas d'un corps quelconque par une décomposition de ce corps en solides convexes, et le théorème, étant démontré pour $h = 0$, a lieu *a fortiori* dans le cas général.

Enfin, après avoir établi ce beau résultat, l'auteur *énonce* deux théorèmes *extrêmement curieux :* l'un pour servir au calcul d'une limite supérieure de K_n dans le cas général de h quelconque, l'autre pour servir au calcul d'une limite supérieure de K_2, dans le cas de $h = 0$.

Voici des démonstrations fort simples de ces théorèmes :

Théorème (sur une limite de K_n). — *Soient n indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et n fonctions* arbitraires F_1, $F_2, \ldots, F_n$, *on pose*

$$F = \alpha_1 F_1 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

puis

$$\begin{cases} B = \int F^2 d\tau, \\ A = h \displaystyle\int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau, \end{cases}$$

puis on considère la forme quadratique des α

$$A - \lambda B.$$

dont on égale le discriminant à zéro; si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de ce discriminant rangées par ordre de grandeurs croissantes, on aura généralement

$$\lambda_i > k_i.$$

Démonstration. — Considérons la forme $A - \lambda B$ qui est définie positive pour $\lambda < \lambda_1$, qui a un carré soustractif pour $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, qui a deux carrés soustractifs pour $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3, \ldots$; donnons à λ la valeur $\lambda_i + \varepsilon$, la forme $A - \lambda B$ sera décomposée ainsi en carrés *indépendants*

$$-P_1^2 - P_2^2 - \ldots - P_i^2 + P_{i+1}^2 + P_{i+2}^2 + \ldots + P_n^2.$$

Or, d'après une remarque bien connue sur les formes quadratiques, nous pourrons donner à la forme une valeur négative, tout en satisfaisant aux relations linéaires suivantes, au nombre de $i - 1$,

$$(2) \quad \begin{cases} \int FU_1\, d\tau = 0, \\ \int FU_2\, d\tau = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int FU_i\, d\tau = 0. \end{cases}$$

On a donc, pour $\lambda = \lambda_i + \varepsilon$ et pour des valeurs convenables des α,

$$A - (\lambda_i + \varepsilon) B < 0;$$

d'autre part, à cause des relations (2), on a, par la définition même de K_i,

$$A - K_i B > 0.$$

On déduit de ces deux inégalités

$$\lambda_i + \varepsilon > K_i$$

et, par suite,

$$\lambda_i > K_i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème (sur une limite de K_2, quand $h = 0$). — *Si l'on considère trois fonctions* u, v, w, *assujetties seu-*

lement à la surface du corps à vérifier la relation

$$(3)\qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

(α, β, γ, cosinus directeurs de la normale à la surface), *on aura*

$$(4)\qquad \frac{\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 d\tau}{\int(u^2+v^2+w^2)\,d\tau} > K_2.$$

Démonstration. — Si nous nous donnons

$$\int(u^2+v^2+w^2)\,d\tau = 1$$

et si nous égalons à zéro la variation de

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 d\tau,$$

en tenant compte de la relation (3), nous trouvons sans difficulté pour les fonctions u', v', w', qui donnent le minimum de l'intégrale précédente, la condition

$$\int\left[\left(\frac{dS}{dx}+\lambda u'\right)\delta u' + \left(\frac{dS}{dy}+\lambda v'\right)\delta v' + \left(\frac{\partial S}{\partial z}+\lambda w'\right)\delta w'\right] d\tau = 0,$$

après avoir posé $S = \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}$, c'est-à-dire

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{dS}{dx}+\lambda u' = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y}+\lambda v' = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial z}+\lambda w' = 0, \end{cases}$$

λ étant une constante, ce qui montre que S satisfait aux équations

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta S + \lambda S = 0, & \text{à l'intérieur du corps,} \\ \frac{dS}{dn} = 0, & \text{à la surface du corps.} \end{cases}$$

et alors, dans ce cas du minimum, le numérateur du premier membre de (4) est précisément λ.

En tenant compte des relations (5) et (6), on peut encore dire qu'on aura

$$(7)\qquad \int\left[\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\right]d\tau=\lambda^2.$$

pendant que

$$(8)\qquad \int S^2\,d\tau=\lambda,$$

et pendant qu'en même temps $\int S\,d\tau=0$. Cette dernière se déduit du théorème de Green et de

$$\int \Delta S\,d\tau=0,\qquad \frac{dS}{dn}=0.$$

On déduit alors de (7) et (8) et de la définition de K_2

$$\lambda > K_2,$$

λ étant le minimum du premier membre de (4). L'inégalité (4) en résulte donc *a fortiori*. C. Q. F. D.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Traité d'Analyse; par *H. Laurent*. T. III : Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. In-8° de 512 pages, avec figures dans le texte. Prix : 12fr.

La Statique graphique et ses applications aux constructions; par *Maurice Lévy*, membre de l'Institut. 2e édition. IVe Partie : Ouvrages en maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre Parties. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. Gr. in-8° de x-350 pages, avec figures dans le texte et un atlas de 4 planches. Prix : 15fr.

Procédés de reproduction des dessins par la lumière; par *R. Colson*, capitaine du génie. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. In-18 jésus de vi-32 pages. Prix : 1fr.

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique; par *Ch. Sturm*, revu et corrigé par *E. Prouhet* et augmenté de la Théorie élémentaire des fonctions elliptiques; par *H. Laurent*. 9e édition, mise au courant des nouveaux programmes de la licence; par *A. de Saint-Germain*, professeur à la Faculté des Sciences de Caen. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. 2 vol. in-8° de XXXII-563 et X-657 pages, avec figures dans le texte. Prix : 14fr.

Éléments de Calcul infinitésimal; par *Duhamel*. 4e édition, revue et annotée par *J. Bertrand*, membre de l'Institut. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. 2 vol. in-8° de XXII-508 et XVI-536 pages, avec 7 planches. Prix : 15fr.

Éléments de Géométrie, conformes aux derniers programmes officiels, renfermant un grand nombre d'exercices classés par paragraphes, et suivis d'un Complément a l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales, et de Notions sur le Lever des plans et le Nivellement; par *Eugène Rouché* et *Ch. de Comberousse*. 4e édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. In-8° de XL-604 pages, avec figures dans le texte. Prix : 6fr.

Traité d'Électricité et de Magnétisme; par *J. Clerk Maxwell*, professeur de Physique expérimentale à l'Université de Cambridge. Traduit de l'anglais sur la 2e édition par *G. Séligmann-Lui*, ingénieur des Télégraphes; avec *Notes et Éclaircissements* par *Cornu, Potier* et *Sarrau*. T. II. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889. Gr. in-8° de 652 pages, avec figures et planches dans le texte. Prix : 15fr.

Traité des Fonctions elliptiques et de leurs applications; par *G.-H. Halphen*, membre de l'Institut. 2e Partie : Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars et Fils. Gr. in-8° de 659 pages, avec figures et planches dans le texte. Prix : 20fr.

La Photographie. Traité théorique et pratique; par *A. Davanne*. T. I : Notions élémentaires. Historique. Épreuves négatives. Principes communs à tous les procédés négatifs. Épreuves sur albumine, au collodion, sur gélatinobromure d'argent, sur pellicule et sur papier. T. II : Épreuves positives aux sels d'argent, de platine, de fer, de chrome. Épreuves par impressions photo-mécaniques. Les couleurs en photographie. Épreuves stéréoscopiques. Projections, agrandissements, micrographie. Réductions, épreuves microscopiques. Notions élémentaires de Chimie. Vocabulaire. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. 2 vol. gr. in-8° de VIII-467 et XIV-573 pages, avec figures et planches dans le texte. Prix : 32fr.

Œuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. *Gaston Darboux*, sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. T. XI : Mécanique analytique, avec Notes de *J. Bertrand* et *G. Darboux* (1re Partie.) Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. In-4° de XXII-502 pages. Prix : 20fr.

Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle, à l'usage des candidats à la Licence et à l'agrégation; par *A. de Saint-Germain,* doyen de la Faculté des Sciences de Caen. 2e édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889. In-8° de x-560 pages, avec figures dans le texte. Prix : 9fr 50.

Traité de Cinématique, à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation; par *E. Villié,* ancien ingénieur des mines, professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. In-8° de viii-275 pages, avec figures dans le texte. Prix : 7fr,50.

Manuel pratique de Cristallographie; par *G. Wyrouboff.* Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889. In-8° de xii-344 pages, avec figures dans le texte et planches en taille douce. Prix : 12fr.

Introduction a l'étude de la Thermodynamique; par *R. Blondlot,* professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Nancy. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888. Gr. in-8° de x-112 pages, avec figures dans le texte. Prix : 3fr,50.

Cours de Trigonométrie; par *Ch. Vacquant,* inspecteur général de l'Instruction publique, et *A. Macé de Lépinay,* professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV. 1re Partie, destinée aux élèves de Mathématiques élémentaires, aux élèves de cinquième année d'Enseignement spécial et aux candidats aux Écoles du gouvernement. 2e Partie, destinée aux élèves de Mathématiques spéciales. 2e édition, revue et corrigée. Paris, G. Masson; 1888.

Cours d'Arithmétique, par *A. Tartinville,* professeur au lycée Saint-Louis. Paris, Nony et Cie; 1889. In-8° de 515 pages. Prix : 5fr.

Mathématiques et Mathématiciens. Pensées et curiosités, recueillies par *A. Rebière.* Paris, Nony et Cie; 1883. In-8° de 281 pages. Prix : 3fr,50.

Traité élémentaire d'Électricité, avec les principales applications; par *R. Colson,* capitaine du génie. 2e édition, Paris, Gauthier-Villars et Fils. In-18 jésus de xiv-220 pages, avec figures dans le texte. Prix : 3fr, 75.

Les Étoiles filantes et les Bolides; par *Félix Hément,* inspecteur général honoraire de l'Instruction publique. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888. Petit in-8° de vi-108 pages, avec figures dans le texte. Prix : 2fr, 50.

Annuaire pour l'an 1889, publié par le Bureau des Longitudes, contenant les Notices suivantes : *Sur les quatre sessions de l'Association géodésique internationale à Paris, Berlin, Nice et Salzbourg;* par *H. Faye.* — Sur la mesure des masses en Astronomie; par *F. Tisserand.* — *Une expédition au massif du mont Blanc;* par *J. Janssen.* — *Une ascension au pic de Ténériffe;* par *Bouquet de la Grye.* — *Discours prononcé à l'inauguration de la statue d'Ampère à Lyon;* par *A. Cornu.* — *Revue des principaux travaux du Bureau des Longitudes en* 1888; par *le Secrétaire.*

In-18 de IX-830 pages, avec deux cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1889. Prix : broché, 1fr, 50; cartonné 2fr.

METHODIK DER STETIGEN DEFORMATION VON ZWEIBLAETTRIGEN RIEMANN'SCHEN FLAECHEN. Ein Uebungsbuch für den geometrischen Theil der Funktionentheorie; von *Fritz Hofmann.* Mit in der Text eingedruckten Figuren. Halle a. S., Louis Nebert, 1888. In-8° de VI-50 pages.

RIVISTA DI ARTIGLIERIA E GENIO. Aprile. Volume II. Rome, Comitato di Artiglieria e Genio, 1888. In-8° de 136 pages.

ANNALES DE LA LICENCE ÈS SCIENCES (mathématiques, physiques, naturelles). Session de Juillet 1888. Paris, Nony et Cie; 1888. In-18 de 36 pages. Prix : 1fr. 50.

DIMONSTRAZIONE DELLA TRANSCENDENZA DEL NUMERO; par *M. Martone,* professore di Matematiche superiori nello Istituto di Catanzaro. Napoli, Angelo Trani, 1888. In-8° de 32 pages.

ÉLÉMENTS DE STATIQUE GRAPHIQUE; par *E. Rouché.* Ouvrage faisant partie de l'ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS fondée par M. *C. Lechalas,* inspecteur général des Ponts et Chaussées. Paris, Baudry, 1889. Gr. in-8° de XVI-284 pages, avec 107 figures dans le texte. Prix : 12fr, 50.

TIRAGES A PART.

Questions diverses sur la géométrie du triangle; Questions diverses sur la nouvelle géométrie du triangle; Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle; De la mesure de la simplicité dans les Sciences mathématiques; par M. E. LEMOINE. Extraits du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1886, 1887 et 1888.

Essai sur la Géométrie des figures imaginaires; par M. G. TARRY. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1887.

Premier inventaire de la géométrie du triangle; par M. E. VIGARIÉ. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1887.

Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle; par M. E. LEMOINE. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France;* T. XVI, 1886.

Sur la convergence des intégrales à limites infinies; par M. PH. GILBERT. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques;* T. XII, 1888.

Notes à propos du cercle des neuf points; Étude des points inverses; par M. E. LEMOINE. Extraits du *Journal de Mathématiques spéciales et élémentaires;* 1886 et 1887.

Note sur les éléments brocardiens; par MM. E. LEMOINE et E. VIGARIÉ. Extrait du *Journal de Mathématiques élémentaires;* 1888.

Sur quelques courbes remarquables; Centre des parallèles égales et points de Jérabelle; par M. E. Vigarié. Extraits du *Journal de Mathématiques élémentaires;* 1887.

Sopra alcuni invarianti simultanei di due forme binarie degli ordini 5 *e* 4 *e sul risultante di esse;* Memoria del socio Enrico d'Ovidio. Extrait des *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei;* 1887.

Sulla similitudine delle curve; Teorema relativo alle linee di curvature delle superficie e sue applicazioni. Memoria di Gemiano Pirondini. Extraits des *Annali di Matematica pura ed applicata;* 1887.

Sur la tension électrique suivant les lignes de force dans les milieux diélectriques; Sur la théorie cinétique des phénomènes capillaires; par le P. Joseph Delsaulx. Extraits des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* 1887-1888.

De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques; par M. E. Lemoine. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1888.

De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques; par M. E. Lemoine. Extrait du *Mathésis;* 1888.

Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti; Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle transformazioni lineari di una certa quartica gobba in se stessa; pel Dr A. del Re. Extraits des *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli;* 1887 et 1888.

Omografie che mutano in se stessa una carta curva gobba del 4° *ordine et* 2ª *specie e correlazioni che la mutano nello sviluppabile dei suoi piani osculatori;* pel Dr A. del Re. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino;* 1887.

Alcune proprieta geometriche che potrebbero essere utili nella teorica dei sistemi di raggi luminosi; Sulla congruenza (6, 2) *delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche che si corrispondono in una determinata omografia non assiale nè omologica dello spazio; Sur une question élémentaire de Géométrie;* par A. del Re. Extraits des *Rendiconti del circolo matematico di Palermo;* 1887 et 1888.

Ueber die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch unendliche Reihen; von Emanuel Ivanov in Sophia. In-4°, autographié; 1887.

Sur les figures affinement variables; par M. J. Neuberg. Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège;* 1889.

Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace; par M. G. de Longchamps. Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Bohême;* 1888.

Nova definizione della curvatura delle superficie e su confronta con quella di Gauss; par M. F. Casorati. Milano; 1889.

REMARQUES SUR LES SURFACES GAUCHES;

Par M. E. CESARO.

M. E. Amigues s'est tout récemment occupé [1] de l'étude des surfaces gauches, dont la ligne de striction est donnée. Nous nous proposons de faire voir qu'on peut aisément établir les propriétés signalées par M. Amigues, et une foule d'autres propriétés des surfaces gauches, au moyen des méthodes intrinsèques, que nous avons développées à plusieurs reprises dans ce Recueil. Il suffit d'employer, dans ce but, un système d'axes mobiles le long de la ligne de striction, et coïncidant à chaque instant avec la tangente, la binormale et la normale principale à cette courbe. Si G et G′ sont les génératrices de la surface, issues de deux points consécutifs M et M′ de la ligne de striction, il est clair que le trièdre formé par la tangente en M, par G et par la parallèle à G′, menée par M, est rectangle le long de la troisième arête, et, par suite, si a, b, c sont les cosinus directeurs de G, et $a+\delta a$, $b+\delta b$, $c+\delta c$ ceux de G′ par rapport aux axes d'origine M, on a $\delta a = 0$. On sait d'ailleurs que, pour une direction quelconque,

$$(1)\qquad \frac{\delta a}{ds} = a' - \frac{c}{\rho}, \qquad \frac{\delta b}{ds} = b' - \frac{c}{r}, \qquad \frac{\delta c}{ds} = c' + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r},$$

les accents servant à désigner les dérivées par rapport à l'arc s. Conséquemment, pour que G soit la génératrice

---

[1] Même Tome, p. 77.

d'une surface gauche, dont la courbe fondamentale (M) serait la ligne de striction, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \qquad a' = \frac{c}{\rho}.$$

On voit par là que la ligne de striction a la propriété de ne pouvoir être géodésique sans rencontrer les génératrices sous un angle constant, et réciproquement ; car, en vertu de (2), c ne peut être nul sans que a soit constant, et réciproquement. En outre, il n'y a pas sur la surface d'autres lignes jouissant de la même propriété : les hypothèses $a =$ const., $c = 0$ entraînent, en effet, $\delta a = 0$, ce qui caractérise la ligne de striction. Les propositions qui précèdent sont dues à M. Ossian Bonnet.

Cela étant, si l'on observe que la plus courte distance de G et G' est $\sqrt{b^2 + c^2}\, ds$, et si l'on appelle $d\theta$ l'angle de ces droites, on voit que le paramètre de distribution des plans tangents est

$$(3) \qquad \frac{1}{\varpi} = \frac{\theta'}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

D'autre part, les relations

$$b\,\delta b + c\,\delta c = 0, \qquad d\theta^2 = \delta b^2 + \delta c^2$$

donnent

$$-\frac{\delta b}{c} = \frac{\delta c}{b} = \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{ds}{\varpi}.$$

On a donc, en observant (1) et (2),

$$(4) \qquad a' = \frac{c}{\rho}, \qquad b' = \frac{c}{r} - \frac{c}{\varpi}, \qquad c' = -\frac{a}{\rho} - \frac{b}{r} + \frac{b}{\varpi}.$$

Ce sont là les formules fondamentales pour l'étude intrinsèque des surfaces gauches. On en trouve sans peine une interprétation géométrique en observant que, si

l'on diminue de $\frac{1}{\varpi}$ la torsion de (M), elles coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes pour que la direction considérée soit invariable dans l'espace.

Pour que la ligne de striction soit une *géodésique* de la surface, il faut et il suffit que la droite G soit située dans le plan rectifiant de la courbe. On doit donc avoir $c = 0$; puis les formules (4) montrent que a et b sont constants et que l'on a

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = \frac{b}{\varpi}. \tag{5}$$

En particulier, si la courbe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution, ϖ est constant. On arrive aux mêmes conclusions en partant de l'hypothèse $a = \text{const.}$, et l'on retrouve ainsi un théorème énoncé par M. Amigues ([1]). La relation (5) fournit aisément le moyen de construire les surfaces gauches, qui admettent pour ligne de striction une géodésique. Cette construction a été indiquée par M. Pirondini dans ses *Studii geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe* ([2]).

Pour que la ligne de striction soit *asymptotique,* il faut et il suffit que G soit dans le plan osculateur, et, par suite, que l'on ait $b = 0$; puis, d'après (4), $\varpi = r$, et

$$a' = \frac{c}{\rho}, \qquad c' = -\frac{a}{\rho}.$$

Ces égalités fournissent la construction, signalée par M. Catalan ([1]), des surfaces gauches admettant pour ligne de striction une de leurs lignes asymptotiques.

([1]) *Loc. cit.,* p. 79.
([2]) *Journal de Battaglini,* 1885, p. 304.
([1]) *Bulletin de la Société philomathique,* 1848.

Pour que la ligne de striction soit une *ligne de courbure,* il faut et il suffit que la normale à la surface, au point M, engendre une surface développable. Les équations de la normale sont

$$x = 0, \qquad by + cz = 0,$$

et leur dérivation donne

$$z = \rho, \qquad bz - cy = a\varpi.$$

En éliminant x, y, z, on obtient la condition cherchée

$$(6) \qquad \frac{\varpi}{\rho} = \frac{b^2 + c^2}{ab}.$$

De plus, le rayon de courbure de la section normale, tangente à (M), est

$$R_1 = \frac{\rho}{b}\sqrt{b^2 + c^2},$$

et il est clair que les courbures principales de la surface sont liées par l'égalité

$$\frac{a^2}{R_1} + \frac{b^2 + c^2}{R_2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$R_2 = -\frac{\varpi}{a}\sqrt{b^2 + c^2},$$

puis $R_1 R_2 = -\varpi^2$. Lors donc que la ligne de striction est ligne de courbure de la surface, la courbure de celle-ci, le long de la ligne en question, est mesurée, en valeur absolue, par le carré du paramètre de distribution des plans tangents.

L'équation du plan tangent à la surface est

$$cy - bz = 0.$$

et sa dérivation donne

$$\frac{bx - ay}{\rho} + \frac{by + cz}{\varpi} = 0.$$

Il en résulte que les cosinus directeurs de la génératrice Γ de la surface développable, circonscrite à la surface donnée suivant la ligne de striction, sont proportionnels à

$$(7) \qquad ab - (b^2 + c^2)\frac{\rho}{\varpi}, \quad b^2, \quad bc.$$

Si la ligne est géodésique, les égalités $c = 0$ et (5) nous disent que ces cosinus sont proportionnels à $-\rho$, r, 0. La développable circonscrite est donc la surface rectifiante de (M) : cela devait être. Si la ligne de striction est asymptotique, on a $b = 0$, et les cosinus cherchés sont 1, 0, 0. Dans ce cas, (M), ligne asymptotique de striction sur la surface gauche, est arête de rebroussement de la développable circonscrite. Enfin, si (M) est ligne de courbure, l'égalité (6) est vérifiée, et l'on voit que les cosinus de Γ sont proportionnels à 0, b, c : les génératrices de la développable circonscrite suivant la ligne de striction rencontrent cette ligne à angle droit. Ces résultats sont fort connus, et l'on sait qu'ils subsistent pour une surface quelconque. Il en est de même du résultat qu'on obtient en observant que, si (M) est ligne plane de courbure, les conditions (4) et (6) exigent que $\frac{b}{c}$ soit constant, d'où il suit que le plan de (M) coupe la surface partout sous le même angle. Remarquons enfin que toute ligne de striction et de courbure ne saurait être géodésique sans être plane. En effet, les conditions (5) et (6) ne peuvent coexister, pour $c = 0$, si r a une valeur finie. Dans ce cas la développable circonscrite suivant la ligne de striction est un cylindre,

admettant pour section droite la ligne considérée, dont la courbure varie proportionnellement au paramètre de distribution.

Puisque les cosinus l, m, n de Γ sont proportionnels aux quantités (7), on trouve facilement que l'angle $\varphi = \Gamma G$ est donné par la formule

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{(b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\varpi}{\rho}b - a(b^2+c^2)}.$$

Dès lors, si l'on pose, pour abréger,

$$\cos\psi = a\cos\varphi - \sqrt{b^2+c^2}\sin\varphi,$$
$$\sin\psi = a\sin\varphi + \sqrt{b^2+c^2}\cos\varphi.$$

on peut écrire

$$l = \cos\psi,\qquad m = \frac{b\sin\psi}{\sqrt{b^2+c^2}},\qquad n = \frac{c\sin\psi}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

On trouve ensuite

$$\frac{\partial l}{ds} = -\varphi'\sin\psi,\qquad \frac{\partial m}{ds} = \frac{b\varphi'\cos\psi}{\sqrt{b^2+c^2}},\qquad \frac{\partial n}{ds} = \frac{c\varphi'\cos\psi}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

et l'on voit que $\varphi =$ const. est la condition nécessaire et suffisante pour que la direction de Γ soit invariable dans l'espace. On en déduit sans peine que les surfaces à cône directeur de révolution sont caractérisées par la propriété de toucher un cylindre suivant leur ligne de striction. Lorsque (M) est ligne de courbure, l'égalité (6) est vérifiée, et la formule (8) fait dépendre φ de a seulement. Pour que φ soit constant il faut donc et il suffit que a le soit, et, par suite, que (M) soit une géodésique. Il en résulte que les surfaces gauches, dont la ligne de striction est géodésique et ligne de courbure,

sont caractérisées par un cône directeur de révolution [1].

Que faut-il pour que les génératrices de la surface donnée soient les *normales principales* d'une courbe? Soit N le point où la génératrice issue de M rencontre la courbe inconnue, et désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la tangente à (N), en N, et par k le rapport des vitesses des points N et M. Si pa, pb, pc sont les coordonnées de N, on a, en appliquant les formules fondamentales de la Géométrie intrinsèque des courbes et en ayant égard aux relations (4),

$$kl = p'a + 1, \qquad km = p'b - \frac{pc}{\varpi}, \qquad kn = p'c + \frac{pb}{\varpi}.$$

Si l'on exprime que les directions (a, b, c) et (l, m, n) sont orthogonales, on trouve $p' = -a$, de sorte que

$$kl = b^2 + c^2, \qquad km = -ab - \frac{pc}{\varpi}, \qquad kn = -ac + \frac{pb}{\varpi}.$$

On en déduit

$$k^2 = (b^2 + c^2)\left(1 + \frac{p^2}{\varpi^2}\right).$$

Par dérivation des avant-dernières formules, on obtient

$$k\frac{\partial l}{ds} = -\frac{pb}{\varpi\rho} - (b^2 + c^2)\frac{p}{\varpi}\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi},$$

$$k\frac{\partial m}{ds} = -\frac{c}{b^2 + c^2}\left(\frac{b}{\rho} - a\frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right) + \frac{pb}{\varpi(b^2 + c^2)}\left(\frac{ab}{\rho} - \frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right) - \left(c - ab\frac{p}{\varpi}\right)\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi},$$

$$k\frac{\partial n}{ds} = \frac{b}{b^2 + c^2}\left(\frac{b}{\rho} - a\frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right) + \frac{pc}{\varpi(b^2 + c^2)}\left(\frac{ab}{\rho} - \frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right) + \left(b + ac\frac{p}{\varpi}\right)\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi}.$$

---

(1) Pirondini, *loc. cit.*, p. 309.

En élevant au carré ces égalités, et en les ajoutant, on trouve que le rayon de courbure ρ_0 de (N) est donné par la formule

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{k^2}{\rho_0^2} = &\left(\frac{b}{b^2+c^2}\,\frac{1}{\rho} - \frac{a}{\varpi} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{p}{\varpi}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{p^2+\varpi^2}}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Soit ψ l'angle sous lequel la normale principale de (N) rencontre la génératrice. On a

$$a\frac{\partial l}{ds} + b\frac{\partial m}{ds} + c\frac{\partial n}{ds} = -\frac{k}{\rho_0}\cos\psi\,;$$

puis, par l'emploi des formules précédentes,

$$(10)\qquad \rho_0 = \left(p + \frac{\varpi^2}{p}\right)\cos\psi.$$

Nous avons ainsi l'expression de la courbure des trajectoires orthogonales des génératrices des surfaces gauches, en fonction de p, ϖ et de l'angle ψ. Lorsque cet angle est donné, on obtient la condition que doivent vérifier a, b, c, en portant dans (9) le résultat (10). Il vient

$$\frac{b}{b^2+c^2}\,\frac{1}{\rho} - \frac{a}{\varpi} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi} = \frac{p}{\varpi}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{p^2+\varpi^2}}\operatorname{tang}\psi.$$

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface donnée soit la surface des normales principales d'une courbe est

$$\frac{a}{\varpi} - \frac{b}{b^2+c^2}\,\frac{1}{\rho} = \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi}.$$

On voit, en ayant égard à (8) et au théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents, que, si la surface est à plan directeur, les plans qui la touchent suivant

(N) sont également inclinés sur les plans correspondants, qui la touchent suivant la ligne de striction.

On a, par le théorème de Lancret,

$$\theta'^2 = k^2\left(\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{r_0^2}\right),$$

d'où l'on déduit, en employant (3) et (10), la torsion de (N). On trouve ainsi

$$\rho_0 = p + \frac{\varpi^2}{p}, \qquad r_0 = \varpi + \frac{p^2}{\varpi}.$$

Ces formules ont été remarquées depuis longtemps par M. Dini dans une étude sur *Alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali* (¹).

Les calculs qui précèdent sont, il est vrai, assez prolixes; mais ils conduisent méthodiquement au but, et l'on peut du reste les rendre fort simples par un choix convenable de la courbe fondamentale. Soit (N) cette courbe, et continuons à désigner par p la longueur NM, par a, b, c les cosinus directeurs de NM et par $dp + dq$ la projection de MM′ sur N′M′. On a

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} ds + p\,\delta a - a\,dq &= l\varpi\,d\theta,\\ p\,\delta b - b\,dq &= m\varpi\,d\theta,\\ p\,\delta c - c\,dq &= n\varpi\,d\theta,\end{aligned}\right.$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la commune perpendiculaire à NM et N′M′ :

$$\frac{l}{b\,\delta c - c\,\delta b} = \frac{m}{c\,\delta a - a\,\delta c} = \frac{n}{a\,\delta b - b\,\delta a} = \frac{1}{d\theta}.$$

Nous supposerons, dorénavant, que la droite NM soit invariablement liée au trièdre fondamental, de sorte que

$$\frac{\delta a}{ds} = -\frac{c}{\rho}, \qquad \frac{\delta b}{ds} = -\frac{c}{r}, \qquad \frac{\delta c}{ds} = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r},$$

(¹) *Journal de Battaglini*, 1866.

et, par suite,

(12) $$\theta'^2 = \left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r}\right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{h\rho},$$

où

$$h = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}$$

est le rayon du cylindre osculateur à (N), et l'on a posé

$$\alpha = \frac{a\rho - br}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \qquad \beta = \frac{ar + b\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \qquad \gamma = c.$$

Les égalités (11), respectivement multipliées par δa, δb, δc, puis par l, m, n, donnent par addition

$$p\, d\theta^2 = -\delta a\, ds, \qquad \varpi\, d\theta = l\, ds,$$

d'où

(13) $$p\,\theta'^2 = \frac{\gamma}{\rho}, \qquad \varpi\theta'^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{r} - \frac{\alpha\beta}{\rho}.$$

Donc, en utilisant (12), on voit que le paramètre de distribution des plans tangents à la surface engendrée par une droite, invariablement liée au trièdre fondamental, est donné par la formule

$$\varpi = \left(\frac{\rho}{r} - \frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \gamma^2}\right) h.$$

A chaque direction correspond une valeur de ϖ, et l'on démontre facilement qu'il y a une seule couple de directions, symétriques par rapport à la normale principale, qui correspondent à un même paramètre, *pourvu que la courbe ne soit pas une hélice*. C'est pourquoi il n'y a que la tangente, en général, qui engendre une surface développable, comme l'a remarqué depuis longtemps M. Appell (¹). Il n'y a, de même, que la binor-

(¹) *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1880; p. 96.

male et la normale principale qui engendrent des surfaces gauches dont les paramètres de distribution soient respectivement

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r} + \frac{r}{\rho^2}.$$

Si la courbe est une hélice, tracée sur un cylindre quelconque, il y a une infinité de droites correspondant à un même paramètre : elles forment un cône du second ordre. Pour $\varpi = 0$, on a le cône signalé par M. Appell, touchant le plan osculateur suivant la tangente à la courbe. Il y a, de même, un cône touchant le plan normal suivant la binormale, et dont toutes les génératrices engendrent des surfaces gauches, qui ont pour paramètre commun la torsion de l'hélice. Le cône correspondant à la normale principale se résout en deux plans perpendiculaires. Tous ces cônes, perpendiculaires au plan tangent, se raccordent suivant la génératrice du cylindre.

Les cônes que nous venons de trouver ne cessent d'exister lorsque (N) n'est pas une hélice ; mais ils sont alors variables d'un point à l'autre de la courbe. Par exemple, le cône de M. Appell est le lieu *instantané* des droites, invariablement liées au trièdre fondamental, génératrices de surfaces gauches pour lesquelles on a, à l'instant considéré, $\varpi = 0$. En général, une seule de ces droites continue à correspondre à cette valeur de ϖ, et engendre, par conséquent, une développable : les autres passent sur d'autres cônes, définis par d'autres valeurs de ϖ, toutes différentes entre elles.

Quant aux points centraux, leur position est déterminée par la première formule (13), qui donne

$$p = \frac{h\gamma}{\rho^2 + \gamma^2}.$$

Ces points se trouvent donc sur un cylindre de diamètre h, touchant la surface rectifiante suivant sa génératrice, et rencontrant orthogonalement, sur des paraboloïdes hyperboliques, tous les cônes dont il vient d'être question.

Arrêtons-nous aux surfaces des normales principales d'une courbe (N), et demandons-nous s'il est possible que ces normales soient les binormales d'une autre courbe (M). Si $x = 0, y = 0, z = p$ sont les coordonnées de (M), on a

$$\frac{\partial x}{ds} = 1 - \frac{p}{\rho}, \qquad \frac{\partial y}{ds} = -\frac{p}{r}, \qquad \frac{\partial z}{ds} = p'.$$

Pour que NM soit normale à (M), il faut que p' soit nul, et, par suite, que p soit *constant*. Si l'on veut, en outre, que NM soit binormale de (M), il faut que l'on ait

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{ds} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad \frac{1}{p\rho} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à (M) sont donc

$$l = \frac{\sqrt{p\rho}}{r}, \qquad m = -\sqrt{\frac{p}{\rho}}, \qquad n = 0,$$

et le rapport k des vitesses des points M et N est

$$(15) \qquad \frac{ds_0}{ds} = \frac{\sqrt{p\rho}}{r}.$$

Cela étant, on a

$$k\frac{\partial l}{ds} = \frac{p\rho'}{2\rho^2}, \qquad k\frac{\partial m}{ds} = \frac{p\rho'}{2\rho r}, \qquad k\frac{\partial n}{ds} = 0,$$

d'où l'on déduit l'expression du rayon de courbure de (M)

$$(16) \qquad \rho_0 = 2\frac{\sqrt{p\rho}}{\rho'}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

Enfin, si l'on observe que les cosinus de la binormale à (M) sont o, o, 1, on a immédiatement, pour exprimer la torsion de (M),

$$\frac{k}{r_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}},$$

d'où

$$(17) \qquad r_0 = p\frac{\rho}{r}.$$

Ainsi nous pouvons nous donner la courbe (N) par une de ses équations intrinsèques, l'autre équation étant nécessairement (14). Ensuite les équations (15), (16), (17) nous feront connaître les coordonnées intrinsèques de (M). Enfin l'élimination de ρ, r, s entre les trois équations dont il s'agit, et les équations intrinsèques de (N), nous fournira les équations intrinsèques de (M).

Inversement, si la courbe (M) est connue, les relations (14) et (17) donnent immédiatement

$$(18) \qquad \rho = p + \frac{r_0^2}{p}, \qquad r = r_0 + \frac{p^2}{r_0};$$

puis l'égalité (15) devient

$$(19) \qquad \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{r_0^2}}.$$

Enfin, en portant dans (16) tous ces résultats, on obtient

$$(20) \qquad \frac{1}{\rho_0} + \frac{d}{ds_0}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\rho_0} = 0,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les binormales de (M) soient les normales principales d'une autre courbe [1]. Celle-ci est parfaitement déterminée par les équations (18) et (19).

---

[1] PIRONDINI, *loc. cit.*, p. 319.

Nous allons appliquer ce qui précède au cas où la courbe (M) est une hélice. Nous exprimerons cela en introduisant une nouvelle longueur constante a et en écrivant $p\rho_0 = ar_0$. L'équation (20) devient

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{\rho_0} = 0,$$

et l'on en déduit que les équations intrinsèques de (M) sont

$$\rho_0 = a\sqrt{e^{\frac{2s_0}{a}} - 1}, \qquad r_0 = p\sqrt{e^{\frac{2s_0}{a}} - 1}.$$

La courbe (M) est donc une *tractrice* tordue. Ses coordonnées intrinsèques peuvent être exprimées en fonction d'une variable τ comme il suit :

$$s_0 = -a\log\sin\tau, \qquad \rho_0 = a\cot\tau, \qquad r_0 = p\cot\tau.$$

On en déduit, au moyen de (18) et (19),

$$s = -a\log\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}, \qquad \rho = \frac{p}{\sin^2\tau}, \qquad r = \frac{p}{\sin\tau\cos\tau}.$$

Les équations intrinsèques de (N) sont donc

$$\rho = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)^2, \qquad \frac{\rho}{r} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

D'une manière analogue on résoudrait toute autre question de Géométrie différentielle, concernant les surfaces réglées ; mais nous montrerons, sous peu, comment on doit s'y prendre pour appliquer la méthode qui précède à l'étude d'une surface quelconque.

SUR L'ANALOGIE ENTRE LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET TRIGONOMÉTRIQUES;

Par M. J. DOLBNIA, à Nijni-Novgorod.

1. Nous nous proposons de rechercher les fonctions transcendantes qui satisfont à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u\, \tau^2 a} = \varphi(a) - \varphi(u).$$

Nous distinguerons deux cas : 1° lorsque $\varphi(u)$ a deux périodes (l'une réelle 2ω, l'autre imaginaire $2\omega'$), et 2° lorsque $\varphi(u)$ a une seule période réelle 2ω.

Premier cas. — Soit

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u), \qquad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u).$$

En transposant les lettres a et u, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{\tau(u+a)\tau(a-u)}{\tau^2 u\, \tau^2 a} = \varphi(u) - \varphi(a).$$

En comparant (1) et (2), nous obtenons

$$\tau(a-u) = -\tau(u-a),$$

c'est-à-dire

$$\tau(-z) = -\tau(z),$$

d'où il suit que $\tau(u)$ est une fonction impaire de l'argument u.

Supposons

$$\lim(u-a) = 0,$$

alors

$$\lim\left[\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u\, \tau^2 a}\right]_{u=a} = 0;$$

donc

$$\lim[\tau(u-a)]_{u=a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\tau(0) = 0.$$

En posant

$$u = a + 2m\omega,$$

où m est un nombre entier, nous avons

(3) $$\frac{\tau(2a + 2m\omega)\tau(2m\omega)}{\tau^2(a + 2m\omega)\tau^2 a} = 0.$$

Si $\tau(u)$ est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, de l'équation (3) nous aurons

$$\tau(2m\omega) = 0.$$

D'une manière semblable, nous trouverons

$$\tau(2m'\omega') = 0;$$

par conséquent, tous les zéros de la fonction $\tau(u)$ sont compris dans la formule suivante

(4) $$u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

De l'équation (1) nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)}{\tau^2 u\,\tau^2 a}\,\frac{\tau(u-a)}{u-a} = -\,\frac{\varphi(u) - \varphi(a)}{u-a}.$$

En posant ici

$$\lim(u-a) = 0,$$

et en rappelant que les deux fonctions $\tau(u)$ et $\varphi(u)$ doivent avoir des dérivées, nous obtiendrons

$$\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}\tau'(0) = -\,\varphi'(u).$$

La constante $\tau'(0)$ est une quantité indéterminée. Nous prenons donc

$$\tau'(0) = 1;$$

alors

$$\varphi'(u) = -\,\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

De là il suit que le développement de la fonction holomorphe $\tau(u)$, suivant les puissances ascendantes de l'argument, commence par la quantité u et aura la forme suivante

$$\tau(u) = u + \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 + \ldots.$$

Il est facile de constater que les infinis de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions simultanées des deux équations

$$\tau(2u) = 0, \qquad \tau^4(u) = 0;$$

donc $\varphi'(u)$ devient l'infini pour toutes les valeurs de l'argument renfermées dans la formule

$$u = m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers pairs.

Les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions de l'équation

$$\tau(2u) = 0;$$

si l'on y ajoute l'inégalité

$$\tau(u) \lesseqgtr 0.$$

D'où il suit que les racines de l'équation

$$\varphi'(u) = 0$$

sont définies par la formule

$$u = (2m+1)\omega + (2m'+1)\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

Ainsi, dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire $(2\omega, 2\omega')$, la fonction $\varphi'(u)$ a trois zéros

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega'$$

et un seul infini

$$u = 0.$$

Il est facile de prouver que cet infini est triple. En

effet, de la formule

$$\varphi'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)},$$

il ressort que, u étant infiniment petit, la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3}.$$

Ainsi $\varphi'(u)$ est la fonction méromorphe doublement périodique du troisième ordre.

En faisant dans l'équation (1)

$$\lim u = 0,$$

nous trouverons que la partie principale de $\varphi(u)$ sera

$$\frac{1}{u^2};$$

par conséquent,

$$\lim [\varphi(u)]_{u=0} = \infty.$$

D'où il suit que tous les infinis de $\varphi(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

A l'intérieur du parallélogramme élémentaire

$$(2\omega,\ 2\omega'),$$

la fonction $\varphi(u)$ a un seul infini

$$u = 0,$$

et cet infini est double. D'où il suit que $\varphi(u)$ a à l'intérieur du même parallélogramme deux zéros [1].

---

[1] Briot et Bouquet. *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 241; 1875.

Il est évident que $\wp(u)$ *est la fonction méromorphe doublement périodique du deuxième ordre* [1].

2. Nommons

$$\wp(\omega) = e_1, \qquad \wp(\omega + \omega') = e_2, \qquad \wp(\omega') = e_3,$$

et considérons les propriétés des binômes

$$(\wp u - e_1), \qquad (\wp u - e_2), \qquad (\wp u - e_3).$$

Le zéro du binôme $(\wp u - e_1)$ est

$$u = \omega;$$

la même valeur de l'argument annule la fonction

$$\frac{d}{du}[\wp(u) - e_1] = \wp'(u);$$

donc la fonction

$$(\wp u - e_1)$$

a à l'intérieur du parallélogramme $(2\omega, 2\omega')$ un seul zéro

$$u = \omega,$$

et ce zéro est double. En outre, il est clair que

$$\wp u - e_1$$

a un infini double

$$u = 0.$$

Par cette raison, le produit

$$(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \tag{7}$$

a trois zéros doubles

$$u = \omega, \qquad u = \omega + \omega', \qquad u = \omega',$$

---

(1) *Ibid.*, p. 197.

et un seul infini sextuple

$$u = 0\,;$$

par conséquent, (7) *est une fonction méromorphe, doublement périodique du sixième ordre.*

La fonction

$$(\wp' u)^2$$

possède ces mêmes zéros et ces mêmes infinis; par conséquent,

$$(\wp' u)^2 = A(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \quad ({}^1),$$

où A est la quantité constante. En choisissant e_1, e_2, e_3 de manière que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

nous parvenons à la fonction $p(u)$ de M. Weierstrass, définie par l'équation différentielle

$$(p' u)^2 = 4 p^3 u - g_2 \, pu - g_3.$$

3. A l'aide de cette équation et du théorème d'Abel relativement à l'addition des arguments, il est facile d'employer les deux formules suivantes,

$$p(u + u_1) + pu + pu_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{p' u - p' u_1}{pu - p' u_1}\right)^2,$$

$$\zeta(u + u_1) - \zeta u - \zeta u_1 = \frac{1}{2}\,\frac{p' u - p' u_1}{pu - pu_1} \quad ({}^2),$$

où

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - pu\right) du.$$

En posant

$$u_1 = \omega,$$

(1) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 242; 1875.

(2) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 29, 138; 1886.

nous aurons

$$(8) \qquad \zeta(\omega + u) = \zeta u + \zeta(\omega) + \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de la fonction holomorphe $\tau(u)$, qui satisfasse à l'équation transcendante

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = p(a) - p(u).$$

En y supposant

$$a = \omega,$$

nous aurons

$$\frac{\tau(\omega+u)\tau(\omega-u)}{\tau^2 u\, \tau^2 \omega} = pu - e_1.$$

Les fonctions $\tau(\omega + u)$, $\tau(\omega - u)$ ont les mêmes zéros; posons donc

$$\tau(\omega + u) = \tau(\omega - u),$$

$$\tau(u + 2\omega) = -\tau u,$$

alors

$$\left\{\frac{\tau(\omega+u)}{\tau u\, \tau\omega}\right\}^2 = pu - e_1,$$

d'où

$$\log\tau(\omega+u) - \log\tau u - \log\tau\omega = \tfrac{1}{2}\log(pu - e_1).$$

En différentiant cette équation relativement à u, nous trouverons

$$(9) \qquad \frac{\tau'(\omega+u)}{\tau(\omega+u)} - \frac{\tau' u}{\tau u} = \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Les équations (8) et (9) donnent

$$\frac{\tau'(\omega+u)}{\tau(\omega+u)} - \frac{\tau' u}{\tau u} = \zeta(\omega+u) - \zeta u - \zeta(\omega);$$

d'où il suit que les deux fonctions

$$\frac{\tau' u}{\tau u} \quad \text{et} \quad \zeta(u)$$

peuvent différer seulement par une fonction linéaire de l'argument, et par conséquent supposons

$$\frac{\tau' u}{\tau(u)} = \zeta(u) + 2\alpha u + \beta.$$

Mais $\frac{\tau' u}{\tau u}$ est une fonction impaire de l'argument, donc

$$\beta = 0,$$

et nous aurons

$$\frac{\tau' u}{\tau u} = \zeta u + 2\alpha u,$$

$$\frac{\tau'(u+\omega)}{\tau(u+\omega)} = \zeta(u+\omega) + 2\alpha u + 2\alpha\omega,$$

par conséquent

$$2\alpha\omega = -\zeta(\omega), \qquad 2\alpha = -\frac{\zeta(\omega)}{\omega};$$

donc

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \frac{\partial}{\partial u}\log\tau(u) = \zeta(u) - \frac{u\zeta(\omega)}{\omega}.$$

La fonction $\sigma(u)$ de M. Weierstrass se définit par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\sigma(u) = \zeta(u),$$

d'où

$$\tau(u) = e^{\frac{-u^2\zeta(\omega)}{2\omega}}\sigma(u).$$

La fonction $\tau(u)$ diffère de la fonction $\Im_1(u)$ de Jacobi seulement par le facteur constant [1].

4. *Deuxième cas.* — Supposons que dans l'équation

$$-\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(u) - \varphi(a)$$

---

[1] Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 251; 1886. Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 465; 1875.

la fonction $\varphi(u)$ ait une seule et unique période réelle π. Par cette supposition, nous passons dans le domaine des fonctions trigonométriques. Il est facile de constater les propriétés suivantes :

a. La fonction $\tau(u)$ est impaire et $\varphi(u)$ paire.

b. Les zéros de $\tau(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = m\pi,$$

où m est un nombre entier arbitraire.

c. En posant

$$\tau'(0) = 1,$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)};$$

d'où il résulte que les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont

$$u = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

et les infinis sont

$$u = m\pi.$$

d. Comme $\tau(0) = 0$, $\tau(\pi) = 0$, $\tau'(0) = 1$, la fonction $\tau(u)$ a un *maximum* pour la valeur de l'argument renfermé dans les limites

$$0 < u < \pi,$$

d'où il suit que

$$\tau'(\pi) < 0.$$

Donc, d'après la continuité de $\tau(u)$, nous concluons que

$$\tau(\pi + u), \qquad \tau(\pi - u)$$

ont des signes contraires. D'autre part, ces fonctions s'annulant toujours pour une même valeur de l'argument, nous pouvons supposer

$$\tau(\pi - u) = A\,\tau(\pi + u).$$

où A est une constante négative. Supposons A = — 1, alors

$$\tau(\pi - u) = -\tau(\pi + u),$$
$$\tau(u + 2\pi) = \tau(u).$$

e. Prenons maintenant l'équation

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

Pour la valeur infiniment petite de u, la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2}{u^3};$$

par conséquent, si $u > 0$, nous aurons

$$\lim(\varphi' u)_{u=0} = -\infty.$$

Pour $u = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\varphi'(u)$ devient égale à zéro, d'où il suit que, dans les limites

$$0 < u < \frac{\pi}{2},$$

notre fonction reste négative.

Par cette raison,

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\frac{\tau(\pi - 2u)}{\tau^4\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} < 0,$$

et comme $\tau(\pi + 2u)$ et $\tau(\pi - 2u)$ ont des signes contraires, nous aurons

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} + u\right) > 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi'(u)$, dans les limites

$$\frac{\pi}{2} < u < \pi.$$

reste positive. Par conséquent $\varphi(u)$, pour $u = \frac{\pi}{2}$, atteint le *minimum*. Pour la valeur u infiniment petite, la partie principale de $\varphi(u)$ est $\frac{1}{u^2}$: donc

$$\lim(\varphi u)_{u=0} = +\infty.$$

Supposons le minimum de $\varphi(u) = m$, alors

$$\varphi(u) - m + 1$$

ne devient jamais nul pour les valeurs réelles de l'argument.

5. Nous considérons les deux fonctions trigonométriques

$$F(u) = [\varphi'(u)]^2$$

et

$$f(u) = (\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m).$$

Entre les limites

$$0 < u < \pi,$$

les deux fonctions ont un seul infini $u = 0$ sextuple; $F(u)$ a un zéro double $u = \frac{\pi}{2}$; cette même valeur de l'argument satisfait à l'équation

$$\varphi(u) - m = 0,$$

et, comme

$$\frac{d}{du}(\varphi u - m) = \varphi'(u)$$

s'annule pour la même valeur de l'argument, nous concluons que $f(u)$ a le zéro double

$$u = \frac{\pi}{2}$$

entre les mêmes limites. Les deux fonctions $F(u)$, $f(u)$

possèdent une même période, et, par conséquent,

$$F(u) = A\,\varphi(u);$$

la constante A est arbitraire. Posons $A = 4$, alors

$$(\varphi' u)^2 = 4(\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m),$$
$$\varphi'(u) = -2(\varphi u - m + 1)\sqrt{\varphi u - m}.$$

Posons $\varphi(u) = x$, alors

$$\frac{dx}{du} = -2(x - m + 1)\sqrt{x - m},$$
$$du = -\frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}},$$
$$u = -\int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} + C.$$

Mais, pour $x = \varphi(u) = m$, nous aurons

$$u = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} = \frac{\pi}{2} - u.$$

En faisant $\sqrt{x - m} = \xi$, nous aurons

$$x = m + \xi^2, \qquad dx = 2\xi\, d\xi, \qquad x - m + 1 = 1 + \xi^2,$$
$$\frac{\pi}{2} - u = \int_0^\xi \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \operatorname{arc\,tang}\sqrt{x - m},$$
$$\sqrt{x - m} = \cot u,$$
$$x = m + \cot^2 u,$$
$$\varphi(u) = m + \cot^2 u.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \cot^2 a - \cot^2 u,$$

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u\,\tau^2 a} = \frac{\sin(u+a)\sin(u-a)}{\sin^2 u \sin^2 a},$$

d'où il suit que

$$\tau(u) = \sin u,$$

$$\frac{d}{du}\log \tau u = \cot u.$$

Ainsi l'analogue de $\mathfrak{p}(u)$ *de M. Weierstrass est* $(m + \cot^2 u)$, *l'analogue de* $\zeta(u)$ *est* $\cot u$, *l'analogue de* $\sigma(u)$ *est* $\sin u$.

6. De tout ce qui précède, il découle naturellement que l'*équation à trois termes* ne peut pas être considérée comme caractéristique pour les fonctions elliptiques, car elle s'étend facilement aux fonctions trigonométriques. En effet, en posant

$$\cot^2 a = \mathrm{A}, \qquad \cot^2 b = \mathrm{B},$$

nous aurons

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin^2 a \sin^2 b} = \mathrm{B} - \mathrm{A}.$$

De l'identité

$$(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{D}-\mathrm{C}) + (\mathrm{B}-\mathrm{C})(\mathrm{A}-\mathrm{D}) + (\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{A}) = 0,$$

il découle l'équation

$$\begin{aligned}&\sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d)\\ +&\sin(c+b)\sin(c-b)\sin(d-a)\sin(d+a)\\ +&\sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c) = 0,\end{aligned}$$

qui n'est autre chose que l'*équation à trois termes*, caractérisant les fonctions trigonométriques aussi bien que les fonctions elliptiques.

SUR UN PASSAGE DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

La méthode suivie par Fourier pour obtenir le développement

$$(A)\qquad 1 = a\cos x + b\cos 3x + c\cos 5x + d\cos 7x + \ldots$$

est très belle, mais elle manque absolument de rigueur, et l'on peut même s'étonner, au premier abord, qu'un tel procédé puisse conduire à un résultat exact.

Fourier pose $x = 0$ dans l'équation (A) et dans celles qu'on en déduit par des différentiations successives. Il obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d + \ldots, \\ 0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + \ldots, \\ 0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + \ldots, \\ 0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

n de ces équations lui fournissent les n premiers coefficients en annulant tous ceux qui suivent, et, en prenant ensuite $n = \infty$, on constate que les valeurs obtenues pour a, b, c, d, ... tendent vers des limites déterminées.

C'est ainsi qu'il obtient le résultat cherché

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots.$$

Nous nous proposons d'étudier de plus près cette méthode.

1. Il est clair que la détermination des $a, b, c, d, \ldots$ d'après Fourier revient à ceci :

Déterminer les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de manière que le développement de

$$\varphi_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \ldots + a_n \cos(2n-1)x$$

soit de cette forme

$$\varphi_n(x) = 1 + k_n x^{2n} + k_{n+1} x^{2n+2} + \ldots.$$

Pour obtenir $\varphi_n(x)$ et en même temps une expression simple de $1 - \varphi_n(x)$, nous remarquons que l'identité

$$(2i \sin x)^{2n-1} = (e^{ix} - e^{-ix})^{2n-1}$$

donne facilement, en développant le second membre,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (\sin x)^{2n-1} = \mathrm{A}_n \Big[\sin x &- \frac{n-1}{n+1} \sin 3x \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \sin 5x \\ &- \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sin 7x - \ldots \Big], \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{4.6.8\ldots(2n)}.$$

On en conclut

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\, dx \\ &= \mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n \Big[\cos x - \frac{1}{3}\frac{n-1}{n+1} \cos 3x \\ &\qquad + \frac{1}{5}\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \cos 5x - \ldots \Big], \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-1}\, dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.$$

Or il est clair que le développement de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\, dx$$

commence par un terme en x^{2n} : donc on a nécessairement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_n(x) = \frac{A_n}{B_n}\Big[&\cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\cos 3x \\ &+ \frac{1}{5}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\cos 5x - \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad 1 - \varphi_n(x) = \int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx : \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-1}\,dx.$$

Fourier n'a pas donné explicitement l'expression de $\varphi_n(x)$, mais on peut la déduire facilement de ses formules et constater l'identité avec la formule (3). On a notamment

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2}{(3^2-1)(5^2-1)(7^2-1)[(2n-1)^2-1]}$$

et il est facile de conclure, d'après la formule de Wallis,

$$(5)\quad \lim \frac{A_n}{B_n} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Supposons que x soit compris entre $\pm\frac{\pi}{2}$ (sans atteindre une de ces limites), la formule (4) permettra facilement de conclure

$$\lim[1-\varphi_n(x)] = 0, \qquad n = \infty.$$

En effet, soit

$$C_n = \int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx,$$

il est clair que

$$C_{n+1} < C_n \sin^2 x$$

et

$$B_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,B_n,$$

donc

$$\frac{1-\varphi_{n+1}(x)}{1-\varphi_n(x)} = \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}} : \frac{C_n}{B_n} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)\sin^2 x.$$

λ étant un nombre fixe compris entre $\sin^2 x$ et 1, le rapport

$$[1-\varphi_{n+1}(x)]:[1-\varphi_n(x)]$$

sera donc constamment inférieur à λ à partir d'une valeur suffisamment grande de n, d'où l'on conclut

$$\text{(6)} \qquad \lim[1-\varphi_n(x)] = 0, \qquad n=\infty.$$

On verra de la même façon que

$$\text{(7)} \qquad \lim \frac{1}{A_n}\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx = 0.$$

Or on a

$$\frac{1}{A_n}\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx = \frac{B_n}{A_n} - \left(\cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\cos 3x + \ldots\right)$$

et

$$\lim \frac{B_n}{A_n} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, pour achever la démonstration de la formule

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots,$$

il suffira de faire voir qu'en posant

$$S = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots,$$

$$S' = \cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\cos 3x + \frac{1}{5}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\cos 5x - \ldots,$$

on a

$$\lim(S-S') = 0, \qquad n=\infty.$$

3. Remarquons d'abord qu'en écrivant

$$S' = a_1\cos x - a_3\cos 3x + a_5\cos 5x - \ldots,$$

les coefficients a_1, a_3, a_5, ... sont positifs et vont en diminuant.

Soit, m étant un entier impair,

$$R_m = \frac{1}{m}\cos mx - \frac{1}{m+2}\cos(m+2)x + \ldots \pm \frac{1}{m+2k}\cos(m+2k)x,$$

$$R'_m = a_m \cos mx - a_{m+2}\cos(m+2)x + \ldots \pm a_{m+2k}\cos(m+2k)x.$$

On aura

$$\begin{aligned} 2R'_m \cos x = {} & a_m \cos(m-1)x \\ & + (a_m - a_{m+2})\cos(m+1)x \\ & - (a_{m+2} - a_{m+4})\cos(m+3)x \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \mp (a_{m+2k-2} - a_{m+2k})\cos(m+2k-1)x \\ & \pm a_{m+2k}\cos(m+2k+1)x; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut qu'en valeur absolue

$$|2R'_m \cos x| < a_m + (a_m - a_{m+2}) + (a_{m+2} - a_{m+4}) + \ldots + (a_{m+2k-2} - a_{m+2k}) + a_{m+2k},$$

$$(8) \qquad |R'_m| < \frac{a_m}{\cos x} < \frac{1}{m\cos x}$$

et de la même façon

$$(9) \qquad |R_m| < \frac{1}{m\cos x}.$$

Cette dernière relation montre que la série S est convergente.

4. Cela étant, soit ε un nombre positif donné aussi petit qu'on voudra. Il faut montrer qu'il est possible de trouver un entier N tel que, pour

$$n \geqq N,$$

on ait toujours

$$|S - S'| < \varepsilon.$$

Il est bien entendu qu'on suppose que x a une valeur fixe comprise entre $\pm\frac{\pi}{2}$.

Voici comment on peut trouver ce nombre N. Décomposons d'abord d'une manière quelconque ε en deux parties également positives :

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

et prenons un nombre entier impair m tel que

$$m > \frac{2}{\varepsilon'' \cos x}.$$

En écrivant alors

$$S = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \ldots \pm \frac{1}{m-2} \cos(m-2)x \pm R_m,$$

$$S' = a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + \ldots \pm a_{m-2} \cos(m-2)x \pm R'_m,$$

on aura, d'après les limitations (8) et (9),

$$|R_m| < \frac{1}{2}\varepsilon'',$$

$$|R'_m| < \frac{1}{2}\varepsilon''.$$

D'autre part, en faisant croître indéfiniment l'entier n, l'expression

$$a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + \ldots \pm a_{m-2} \cos(m-2)x$$

tend vers

$$\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \ldots \pm \frac{1}{m-2} \cos(m-2)x.$$

On peut donc déterminer un entier N tel que, pour

$$n \geqq N,$$

la différence de ces deux expressions soit inférieure à ε', et il est visible que, pour ces valeurs de n, on aura

$$|S - S'| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

La formule

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \ldots$$

est ainsi démontrée rigoureusement; il faut supposer x compris entre $\pm \frac{\pi}{2}$.

5. On peut obtenir d'une façon analogue le développement

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x - \ldots.$$

On déterminera d'abord une expression

$$\Psi_n(x) = a_1 \sin 2x + a_2 \sin 4x + \ldots + a_n \sin 2nx,$$

par la condition que le développement de $\Psi_n(x)$ soit de cette forme

$$\Psi_n(x) = x + k_n x^{2n+1} + k_{n+1} x^{2n+3} + \ldots.$$

On obtient immédiatement la valeur de $\Psi_n(x)$ en remarquant que

$$\Psi_n(x) - x$$

ne peut différer que par un facteur constant de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n}\, dx,$$

et la suite du raisonnement est tout à fait semblable à ce que nous venons d'exposer en détail.

SUR LE PROBLÈME DE CLEBSCH (THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES, § 39 A 42);

PAR M. E. FONTANEAU.

1. L'équilibre d'élasticité des corps cylindriques a fait l'objet d'une étude spéciale, à raison de leur emploi

fréquent dans les constructions et dans les machines. Parmi les auteurs qui s'en sont occupés, il y a lieu de distinguer de Saint-Venant et Clebsch. Le premier, dans deux Mémoires célèbres, a considéré le cas simple où l'équilibre d'un cylindre résulte de pressions ou tractions appliquées à l'une de ses bases, tandis que l'autre est fixée d'une manière quelconque, et il a obtenu par le calcul, relativement à deux modes particuliers de sa déformation, la flexion et la traction, des résultats importants qu'il a ensuite vérifiés par l'expérience.

Clebsch, auquel on doit, dans son ouvrage classique *Sur la théorie de l'élasticité des corps solides,* une exposition remarquable de la question traitée par de Saint-Venant, s'est ensuite placé sur un autre terrain. L'ingénieur français n'avait étudié que des états d'équilibre caractérisés par l'absence de pressions latérales; le géomètre allemand s'occupa précisément du cas où elles existent seules. Dans l'équilibre d'une plaque plane, c'est-à-dire d'un cylindre de longueur très restreinte, il paraît avoir voulu rechercher l'effet propre produit dans ses sections transversales par les pressions ou tractions appliquées à sa surface courbe et compléter ainsi dans un champ d'études contigu, mais distinct, les travaux de de Saint-Venant. C'est sans doute à raison de ce but, et peut-être aussi des difficultés du sujet, qu'il a supposé nulle la composante normale d'élasticité parallèle à l'axe du cylindre; mais on peut, sans compliquer les calculs, s'affranchir de cette restriction.

D'ailleurs Clebsch a cru devoir s'occuper des conditions spéciales à la surface du corps, sans avoir effectué complètement l'intégration indéfinie des équations aux dérivées partielles de l'élasticité. Si ce procédé, quelque peu anormal, ne pouvait avoir de la part d'un si habile géomètre que des inconvénients médiocres, on comprend

néanmoins qu'il en résulte une lacune qu'il est nécessaire de combler, dans l'intérêt de la question qu'il a traitée, sans l'épuiser.

Je crois donc utile de revenir sur ce sujet pour en rendre élémentaire, s'il est possible, l'exposition, en le rattachant à la méthode générale de solution inaugurée par Lamé et, après lui, appliquée avec succès par plusieurs géomètres français, qu'il est inutile de citer parce que leurs travaux ont été publiés dans des recueils universellement répandus. Pour ne pas embrasser un cadre trop étendu, je me bornerai au problème le plus facile parmi ceux dont Clebsch a donné la solution, en supposant nulle avec lui, pour tous les points du corps, la composante normale d'élasticité N_z (notation de Lamé et de Franz Neumann) et admettant, en outre, qu'il n'y ait pas de forces extérieures appliquées à la masse du corps.

2. Si l'on désigne par λ_1 l'une des dilatations principales en un point (x, y, z) d'un corps élastique, et par α_1, β_1, γ_1 ses trois cosinus directeurs par rapport au système d'axes rectangulaires OX, OY, OZ, on a, en général,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= \alpha_1\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)+\beta_1\frac{du}{dy}+\gamma_1\frac{du}{dz}\\
&=-\alpha_1\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)-\beta_1\frac{dv}{dx}-\gamma_1\frac{dw}{dx},\\
\delta\beta_1 &= \alpha_1\frac{dv}{dx}+\beta_1\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)+\gamma_1\frac{dv}{dz}\\
&=-\alpha_1\frac{du}{dy}-\beta_1\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)-\gamma_1\frac{dw}{dy},\\
\delta\gamma_1 &= \alpha_1\frac{dw}{dx}+\beta_1\frac{dw}{dy}+\gamma_1\left(\frac{dw}{dz}-\lambda_1\right)\\
&=-\alpha_1\frac{du}{dz}-\beta_1\frac{dv}{dz}-\gamma_1\left(\frac{dw}{dz}-\lambda_1\right),
\end{aligned}\right.$$

où $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, $\delta\gamma_1$ désignent les variations des cosinus directeurs de la dilatation principale due à la déformation du corps.

Je suppose que cette déformation ait lieu de manière que l'on ait pour tous les points du corps les égalités

$$(2)\qquad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=0,\qquad \frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}=0,\qquad \lambda\theta+2\mu\frac{dw}{dz}=0,$$

ou, ce qui revient au même pour un corps isotrope,

$$T_y=0,\qquad T_x=0,\qquad N_z=0.$$

Par suite des formules (1) et des deux premières égalités (2), on a les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} 2\alpha_1\left(\dfrac{du}{dx}-\lambda_1\right)+\beta_1\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right)=0,\\ \alpha_1\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right)+2\beta_1\left(\dfrac{dv}{dy}-\lambda_1\right)=0,\\ 2\gamma_1\left(\dfrac{dw}{dz}-\lambda_1\right)=0,\end{cases}$$

auxquelles on peut satisfaire de trois manières :

1° Par le système de conditions

$$(4)\qquad \frac{dw}{dz}-\lambda_1=0,\qquad \alpha_1=0,\qquad \beta_1=0,\qquad \gamma_1=0;$$

2° par le suivant

$$4\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)-\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)^2=0,$$
$$\alpha_1^2+\beta_1^2=0,\qquad \gamma_1=0;$$

3° enfin, en supposant qu'on ait, abstraction faite de toute valeur particulière des cosinus,

$$4\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)-\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)^2=0,$$
$$\frac{dw}{dz}-\lambda_1=0.$$

Je m'occuperai exclusivement de la première hypothèse définie par les relations (4), parce que le calcul montrera qu'elle comprend les deux autres.

Si, pour la commodité des expressions, on pose

$$\delta\alpha_1 = A_1, \qquad \delta\beta_1 = B_1, \qquad \delta\gamma_1 = C_1,$$

on aura, par les formules (1),

$$(5) \qquad A_1 = \frac{du}{dz} = -\frac{dw}{dx}, \qquad B_1 = \frac{dv}{dz} = -\frac{dw}{dy}, \qquad C_1 = 0,$$

et, d'après la troisième égalité (2),

$$(6) \qquad \frac{dw}{dz} = \lambda_1 = -\frac{\lambda}{2\mu}\theta.$$

Il faut, dans ces conditions particulières, satisfaire aux équations aux dérivées partielles de la déformation des corps isotropes, dans le cas de l'équilibre, qui sont, comme on le sait,

$$(7) \qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta u = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta v = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta w = 0, \end{cases}$$

où Δ désigne l'opération $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ et θ la dilatation cubique définie par l'égalité

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

De là il résulte

$$(8) \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy}\right], \\ \Delta w = -\dfrac{dA_1}{dx} - \dfrac{dB_1}{dy} - \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{dA_1}{dx} + \dfrac{dB_1}{dy}\right] \\ \qquad = -\dfrac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{dA_1}{dx} + \dfrac{dB_1}{dy}\right], \end{cases}$$

et ces expressions, substituées dans la troisième équation (7), la réduisent à une identité; on n'a donc à satisfaire qu'aux deux autres, qui deviennent.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right] \\ &\quad+\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}\right]+\mu\frac{dA_1}{dz}=0, \\ &\mu\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}\right] \\ &\quad+\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2v}{dy^2}\right]+\mu\frac{dB_1}{dz}=0. \end{aligned}\right.$$

Or, en vertu des relations (5), (6) et (8), il vient

$$\frac{dA_1}{dy}=\frac{dB_1}{dx},$$
$$\frac{dA_1}{dz}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}\right],$$
$$\frac{dB_1}{dz}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2v}{dy^2}\right]$$

et, par suite,

$$\frac{d^2A_1}{dz^2}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dx\,dy}\right]=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}\right],$$
$$\frac{d^2B_1}{dz^2}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx\,dy}+\frac{d^2B_1}{dy^2}\right]=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2B_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dy^2}\right].$$

On a d'ailleurs, par les équations (9),

$$\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dx\,dy}\right]+\frac{d^2A_1}{dz^2}=0,$$
$$\frac{d^2B_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dy^2}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx\,dy}+\frac{d^2B_1}{dy^2}\right]+\frac{d^2B_1}{dz^2}=0,$$

et, de toutes ces égalités, il est aisé de conclure, pour la détermination de A_1 et de B_1, les relations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2A_1}{dz^2}=0, \qquad \frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}=\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dx\,dy}=0, \\ &\frac{d^2B_1}{dz^2}=0, \qquad \frac{d^2B_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dy^2}=\frac{d^2A_1}{dx\,dy}+\frac{d^2B_1}{dy^2}=0, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on satisfait d'une manière générale en posant

$$(11)\quad \begin{cases} A_1 = \left[\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]z + \dfrac{dK}{dx} + \dfrac{N_1}{2}(x+y), \\ B_1 = \left[\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]z + \dfrac{dK}{dy} + \dfrac{N_1}{2}(x+y), \end{cases}$$

où n_1 et N_1 désignent des constantes, tandis que ω et K sont des fonctions de x et y assujetties à vérifier les équations aux dérivées partielles

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 K}{dx^2} + \frac{d^2 K}{dy^2} = 0.$$

3. Des relations (5) et (11), on déduit, pour les composantes de déformation u, v, w,

$$(12)\quad \begin{cases} u = \left[\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]\dfrac{z^2}{2} + \left[\dfrac{dK}{dx} + \dfrac{N_1}{2}(x+y)\right]z + U, \\ v = \left[\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]\dfrac{z^2}{2} + \left[\dfrac{dK}{dy} + \dfrac{N_1}{2}(x+y)\right]z + V, \\ \dfrac{dw}{dx} = -\left[\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]z - \dfrac{dK}{dx} - \dfrac{N_1}{2}(x+y), \\ \dfrac{dw}{dy} = -\left[\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]z - \dfrac{dK}{dy} - \dfrac{N_1}{2}(x+y), \\ \dfrac{dw}{dz} = \lambda_1 = -\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy}\right] \\ \qquad = -\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[n_1\dfrac{z^2}{2} + N_1 z + \dfrac{dU}{dx} + \dfrac{dV}{dy}\right], \end{cases}$$

expressions où U et V désignent des fonctions de x et y à déterminer.

Pour cela, il faut substituer dans les équations (9) les expressions (12) de u et de v; les termes du résultat

où entrent z^2 et z se détruisent, et il vient

$$(13) \begin{cases} (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}\right]+2(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right] \\ \quad =-(\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right], \\ (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right]+2(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx\,dy}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right] \\ \quad =-(\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]. \end{cases}$$

D'ailleurs, par les conditions d'intégrabilité, on déduit des égalités (12)

$$(14) \begin{cases} (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=\lambda\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right], \\ (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=\lambda\left[\dfrac{d^2U}{dx\,dy}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right], \end{cases}$$

d'où il résulte, d'une part,

$$(15) \qquad \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}\left[\omega+\frac{n_1}{4}(x+y)^2\right],$$

et, d'autre part,

$$(16) \begin{cases} \lambda\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}\right]+(3\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0, \\ \lambda\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right]+(3\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0. \end{cases}$$

De ces deux relations, on déduit encore celles-ci :

$$(17) \begin{cases} \lambda\left[\dfrac{d^2U}{dy^2}-\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right]+4(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0, \\ \lambda\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}-\dfrac{d^2U}{dx\,dy}\right]+4(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0, \end{cases}$$

qui ne peuvent subsister ensemble, à moins que l'on n'ait

$$n_1=0;$$

supprimant donc cette constante, on aura

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\left[\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\right]=(\lambda+2\mu)\omega,\\ &\lambda\left[\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right]=4(\lambda+\mu)\int\left[\frac{d\omega}{dx}dy-\frac{d\omega}{dy}dx\right].\end{aligned}\right.$$

J'observe ensuite qu'on peut remplacer les équations (13) par les suivantes :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\left[\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}\right]\\ &\qquad+(3\lambda+2\mu)\left[\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2V}{dx\,dy}\right]=0,\\ &(\lambda+2\mu)\left[\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right]\\ &\qquad+(3\lambda+2\mu)\left[\frac{d^2U}{dx\,dy}+\frac{d^2V}{dy^2}\right]=0,\end{aligned}\right.$$

dont la solution générale est donnée par les formules

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &U=-\frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\left[x\frac{d\Omega_1}{dx}+y\frac{d\Omega_2}{dx}\right]+\frac{5\lambda+6\mu}{8(\lambda+\mu)}\Omega_1,\\ &V=-\frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\left[x\frac{d\Omega_1}{dy}+y\frac{d\Omega_2}{dy}\right]+\frac{5\lambda+6\mu}{8(\lambda+\mu)}\Omega_2,\end{aligned}\right.$$

où Ω_1, Ω_2 désignent des fonctions assujetties à vérifier les équations

$$(21)\qquad \frac{d^2\Omega_1}{dx^2}+\frac{d^2\Omega_1}{dy^2}=0,\qquad \frac{d^2\Omega_2}{dx^2}+\frac{d^2\Omega_2}{dy^2}=0.$$

De ces formules, il résulte

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}=\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d\Omega_1}{dx}+\frac{d\Omega_2}{dy}\right],\\ &\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}=\frac{d\Omega_2}{dx}-\frac{d\Omega_1}{dy}.\end{aligned}\right.$$

et par suite des égalités (18), on a

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy} = \dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}\,\omega, \\[2ex] \dfrac{d\Omega_2}{dx} - \dfrac{d\Omega_1}{dy} = \dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}\displaystyle\int\left[\dfrac{d\omega}{dx}\,dy - \dfrac{d\omega}{dy}\,dx\right], \end{cases}$$

relations compatibles avec les équations (21).

D'après cela, il vient

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dx} = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx^2} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dx\,dy}\right], \\[2ex] \dfrac{d\omega}{dy} = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx\,dy} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dy^2}\right], \end{cases}$$

et, en portant ces expressions dans les formules (12), on peut leur substituer les suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx^2} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dx\,dy}\right]\dfrac{z^2}{2} \\[1ex] \qquad + \left[\dfrac{dK}{dx} + \dfrac{N_1}{2}(x+y)\right]z + U, \\[2ex] v = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx\,dy} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dy^2}\right]\dfrac{z^2}{2} \\[1ex] \qquad + \left[\dfrac{dK}{dy} + \dfrac{N_1}{2}(x+y)\right]z + V, \\[2ex] w = -\dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy}\right]z \\[1ex] \qquad - \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\dfrac{N_1}{2}\,z^2 - \dfrac{N_1}{4}(x+y)^2 - K. \end{cases}$$

Ces expressions, complétées par les valeurs (20) de U et V, donnent les formules générales d'intégration des équations (7) dans le cas considéré. En effet, la méthode qui y a conduit est absolument indépendante de la signification donnée, conformément aux formules (1), aux quantités A_1, B_1 et λ_1, et par suite n'est sujette à aucune restriction. Néanmoins rien n'empêche d'y joindre, avec la signification donnée aux quantités λ_1,

A_1, B_1, leurs expressions

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{dw}{dz} &= -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d\Omega_1}{dx} + \frac{d\Omega_2}{dy}\right] - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} N_1 z, \\ A_1 = \rho_2 &= \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d\Omega_1}{dx^2} + \frac{d^2\Omega_2}{dx\,dy}\right] z \\ &\quad + \frac{dK}{dx} + \frac{N_1}{2}(x+y), \\ -B_1 = \rho_1 &= -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy} + \frac{d^2\Omega_2}{dy^2}\right] z \\ &\quad - \frac{dK}{dy} - \frac{N_1}{2}(x+y), \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{d\Omega_2}{dx} - \frac{d\Omega_1}{dy}\right], \end{aligned}\right.$$

en désignant par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois composantes de rotation définies par les égalités

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) = -B_1,$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) = A_1,$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right).$$

La dilatation cubique θ est d'ailleurs donnée par l'égalité

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \\ &= \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} N_1 z + \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\left[\frac{d\Omega_1}{dx} + \frac{d\Omega_2}{dy}\right]. \end{aligned}\right.$$

4. Problème. — *Une plaque plane est sollicitée par des forces de traction appliquées à son contour, de manière que la contraction perpendiculaire à ses faces planes soit partout la même, tandis que chaque point du périmètre de la section médiane éprouve un dé-*

placement arbitraire assigné d'avance suivant la normale à la surface latérale de la plaque : trouver pour tous les points de la plaque les composantes de déformation et d'élasticité (Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides,* § XLI).

Je prendrai pour plan des coordonnées x, y la section médiane de la plaque et, en la supposant douée d'un centre, ce centre pour origine des coordonnées. Pour que la contraction λ_1 donnée par la première des expressions (26) soit constante, il faut qu'on ait

$$(28) \qquad \frac{d\Omega_1}{dx} + \frac{d\Omega_2}{dy} = a, \qquad N_1 = 0,$$

et, par suite des égalités (22) et (23),

$$(29) \qquad \frac{d\Omega_2}{dx} - \frac{d\Omega_1}{dy} = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = b,$$

en désignant par a et b deux constantes. Si, de plus, on suppose avec Clebsch que les composantes d'élasticité et de déformation doivent être symétriques par rapport à la section médiane, on aura de plus

$$K = \text{const.}$$

On satisfait généralement aux relations (28) et (29) en posant

$$(30) \quad \Omega_1 = \frac{d\Omega}{dx} + \frac{a}{2}x - \frac{b}{2}y, \qquad \Omega_2 = \frac{d\Omega}{dy} + \frac{a}{2}y + \frac{b}{2}x,$$

où Ω désigne une fonction de x et de y qui vérifie l'équation

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} = 0,$$

et, par suite, on peut substituer aux formules (25) les

suivantes :

$$(31)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{3\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)}\left[x\dfrac{d^2\Omega}{dx^2} + y\dfrac{d^2\Omega}{dx\,dy}\right] \\ \qquad - \dfrac{5\lambda + 6\mu}{8(\lambda + \mu)}\dfrac{d\Omega}{dx} + \dfrac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)}ax - \dfrac{b}{2}y, \\ v = -\dfrac{3\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)}\left[x\dfrac{d^2\Omega}{dx\,dy} - y\dfrac{d^2\Omega}{dy^2}\right] \\ \qquad + \dfrac{5\lambda + 6\mu}{8(\lambda + \mu)}\dfrac{d\Omega}{dy} + \dfrac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)}ay - \dfrac{b}{2}x, \\ w = -\dfrac{\lambda}{4(\lambda + \mu)}az - \text{const.} \end{cases}$$

Ces formules se simplifient encore si l'on prend pour Ω une fonction Ω_ν homogène de degré ν, et si l'on observe qu'à l'origine des coordonnées on doit avoir les égalités suivantes (Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, § XXII),

$$u = 0,\qquad v = 0,\qquad w = 0,$$
$$\frac{dv}{dx} = 0,\qquad \frac{dw}{dx} = 0,\qquad \frac{dw}{dy} = 0;$$

il vient définitivement

$$(32)\quad \begin{cases} u = \dfrac{2(\lambda + 2\mu) - (3\lambda + 2\mu)\nu}{8(\lambda + \mu)}\dfrac{d\Omega_\nu}{dx} \\ \qquad + \dfrac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)}ax - \dfrac{b}{2}y, \\ v = \dfrac{2(\lambda + 2\mu) - (3\lambda + 2\mu)\nu}{8(\lambda + \mu)}\dfrac{d\Omega_\nu}{dy} \\ \qquad - \dfrac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)}ay - \dfrac{b}{2}x, \\ w = -\dfrac{\lambda}{4(\lambda + \mu)}az,\qquad b = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(\dfrac{d^2\Omega_\nu}{dx\,dy}\right)_0. \end{cases}$$

5. Dans le cas particulier d'une plaque circulaire, le moyen le plus simple de déterminer les composantes de déformation u, v, w conformément aux données du problème est d'employer les coordonnées semi-polaires. Si

l'on pose

(33) $$x = \rho \cos p, \qquad y = \rho \sin p, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

il en résulte

$$\frac{d\Omega_\nu}{dx} = \cos p \frac{d\Omega_\nu}{d\rho} - \frac{\sin p}{\rho} \frac{d\Omega_\nu}{dp},$$
$$\frac{d\Omega_\nu}{dy} = \sin p \frac{d\Omega_\nu}{d\rho} + \frac{\cos p}{\rho} \frac{d\Omega_\nu}{dp}$$

et

(34) $$\frac{d^2\Omega_\nu}{dx^2} + \frac{d^2\Omega_\nu}{dy^2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\Omega_\nu}{dp^2} + \frac{d^2\Omega_\nu}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Omega_\nu}{d\rho} = 0,$$

d'où, en faisant

(35) $$\Omega_\nu = \rho^\nu \varphi_\nu,$$

où φ_ν désigne une fonction de p, il résulte

(36) $$\rho^{\nu-2} \left[\frac{d^2\varphi_\nu}{dp^2} + \nu^2 \varphi_\nu \right] = 0,$$

équation différentielle du second ordre dont la solution générale est

(37) $$\varphi_\nu = A_\nu \sin \nu p + B_\nu \cos \nu p$$

et

$$\frac{d\Omega_\nu}{dx} = \rho^{\nu-1} \left[\nu \cos p \, \varphi_\nu - \sin p \frac{d\varphi_\nu}{dp} \right],$$
$$\frac{d\Omega_\nu}{dy} = \rho^{\nu-1} \left[\nu \sin p \, \varphi_\nu + \cos p \frac{d\varphi_\nu}{dp} \right].$$

D'après cela il vient, pour tous les points du corps,

(38) $$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{2(\lambda + 2\mu) - (3\lambda + 2\mu)\nu}{8(\lambda + \mu)} \rho^{\nu-1} \left[\nu \cos p \, \varphi_\nu - \sin p \frac{d\varphi_\nu}{dp} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)} a \rho \cos p - \frac{b}{2} \rho \sin p, \\ v &= \frac{2(\lambda + 2\mu) - (3\lambda + 2\mu)\nu}{8(\lambda + \mu)} \rho^{\nu-1} \left[\nu \sin p \, \varphi_\nu + \cos p \frac{d\varphi_\nu}{dp} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)} a \rho \sin p - \frac{b}{2} \rho \cos p, \\ w &= -\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} a z. \end{aligned} \right.$$

et sur le contour de la plaque, en désignant par r le rayon de sa section médiane, et par N l'expression en fonction de p du déplacement normal à la surface latérale de la plaque,

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} & u\cos p + v\sin p \\ & \quad = \mathrm{N} = \sum_{\nu} \frac{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{8(\lambda+\mu)}\nu\, r^{\nu-1} \\ & \qquad \times [\mathrm{A}_\nu \sin\nu p + \mathrm{B}_\nu \cos\nu p] + \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} ar. \end{aligned} \right.$$

Comme on suppose la plaque pleine et non pas annulaire, les valeurs négatives de ν doivent être exclues, et l'on déterminera les coefficients A et B suivant la méthode habituelle, en posant

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_\nu &= \frac{8(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}\,\frac{1}{\nu\pi r^{\nu-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{N}\sin\nu p\, dp, \\ \mathrm{B}_\nu &= \frac{8(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}\,\frac{1}{\nu\pi r^{\nu-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{N}\cos\nu p\, dp, \end{aligned} \right.$$

formules à employer depuis $\nu = 1$ jusqu'à $\nu = \infty$. Quant à la détermination de a, on ne peut l'obtenir ainsi, mais elle est immédiate, car, si dans l'égalité (39) on fait $p = 0$, d'où il suit $\nu = 0$, il vient

$$(41)\qquad \mathrm{N}_0 = \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} ar, \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\,\frac{\mathrm{N}_0}{r},$$

en désignant par N_0 le terme constant de l'expression de N en fonction de p.

La connaissance des coefficients A et B donnera φ_ν, et, à l'aide de cette fonction, on aura les valeurs de u, v, w pour tous les points du corps par les formules (38).

6. Pour arriver à la détermination des forces aptes à produire ces déplacements, il faut satisfaire pour tous les points de la surface latérale de la plaque aux équa-

tions

$$(42)\qquad \begin{cases} X = N_x \cos p + T_z \sin p, \\ Y = T_z \cos p + N_y \sin p. \end{cases}$$

Or, on a

$$N_x = \frac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)} \frac{d^2\Omega_\nu}{dx^2} + \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)} a,$$

$$N_y = \frac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\nu}{4(\lambda+\mu)} \frac{d^2\Omega_\nu}{dy^2} + \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)} a,$$

$$T_z = \frac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)} \frac{d^2\Omega_\nu}{dx\,dy},$$

et par suite il vient, en ayant égard aux égalités (33),

$$(43)\qquad \begin{cases} Xr = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)} (\nu-1) \dfrac{d\Omega_\nu}{dx} \\ \qquad + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)} ax, \\ Yr = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)} (\nu-1) \dfrac{d\Omega_\nu}{dy} \\ \qquad + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)} ay, \end{cases}$$

et, en passant aux coordonnées semi-polaires,

$$(44)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)} (\nu-1) r^{\nu-2} \\ \qquad \times \left[\nu \cos p\, \varphi_\nu - \sin p \dfrac{d\varphi_\nu}{dp}\right] + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)} a \cos p, \\ Y = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu) - (3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)} (\nu-1) r^{\nu-2} \\ \qquad \times \left[\nu \sin p\, \varphi_\nu + \cos p \dfrac{d\varphi_\nu}{dp}\right] + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)} a \sin p. \end{cases}$$

On peut ici observer avec Clebsch que, si l'on fait abstraction, dans les seconds membres des égalités (38) et (43), des termes où figure a, on a

$$(45)\qquad X = \mu \frac{du}{dr}, \qquad Y = \mu \frac{dv}{dr},$$

ce qui permet de déduire les composantes de traction X

et Y des composantes de déformation u et v. On a d'ailleurs

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} D &= X\cos p + Y\sin p \\ &= \sum_{\nu} \frac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}\,\nu(\nu-1)r^{\nu-2} \\ &\quad\times[A_\nu \sin\nu p + B_\nu \cos\nu p] + \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}\,a, \end{aligned}\right.$$

en désignant par D la composante de traction normale à la surface latérale de la plaque, et si on la suppose connue pour les points du contour, on pourra déterminer les coefficients A_ν et B_ν par les formules

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} A_\nu &= \frac{4(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\,\frac{1}{\nu(\nu-1)\pi r^{\nu-2}}\int_0^{2\pi} D\sin\nu p\,dp, \\ B_\nu &= \frac{4(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\,\frac{1}{\nu(\nu-1)\pi r^{\nu-2}}\int_0^{2\pi} D\cos\nu p\,dp. \end{aligned}\right.$$

Il faut observer, relativement à ces formules, qu'on ne peut les employer que depuis $\nu = 2$ jusqu'à $\nu = \infty$. On voit en effet, par les formules (43), que, pour $\nu = 1$, on a

$$(48)\quad X_1 = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}\,a\cos p, \qquad Y_1 = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}\,a\sin p,$$

et pour $\nu = 0$, il vient, par l'égalité (44),

$$(49)\qquad D_0 = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}\,a,$$

en désignant par D_0 la partie constante de la composante normale de traction.

GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1874;

PAR M. ÉMILE BOREL,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski).

On donne un triangle ABC. *On sait que, par un point* M *de son plan, passent, en général, deux coniques d'excentricité donnée e circonscrites au triangle.*

Cela posé, trouver le lieu du point M *tel que les axes homologues des deux coniques correspondantes fassent entre eux un angle donné* V.

Pour résoudre ce problème, nous ferons usage de la transformation du second ordre qui, en prenant pour triangle de référence le triangle ABC et supposant les coordonnées trilinéaires normales, est définie par les formules

$$Xx = Yy = Zz.$$

Rappelons-en sommairement les principales propriétés.

A un point correspond un point; les droites qui joignent deux points correspondants au sommet d'un même angle du triangle sont antiparallèles par rapport aux côtés de cet angle. Exception unique : aux sommets du triangle correspondent tous les points des côtés opposés.

Aux droites menées par le sommet d'un angle du triangle de référence correspondent les droites antiparallèles par rapport à cet angle; aux autres droites, des coniques circonscrites au triangle de référence; à la droite de l'infini correspond le cercle circonscrit.

A une conique correspond, en général, une courbe du

quatrième ordre ayant pour points doubles les trois sommets. Si la conique passe par un, deux ou trois sommets du triangle, la transformée est une cubique, une conique ou une droite.

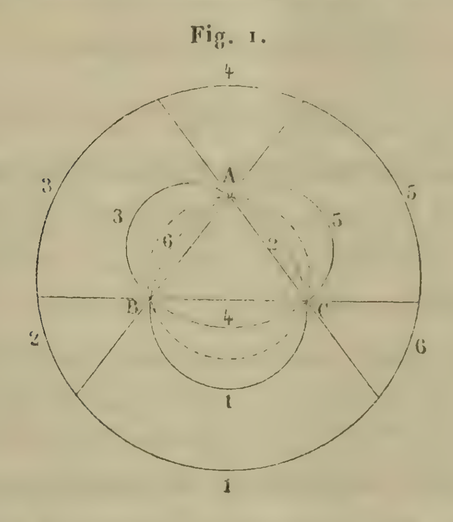
Aux coniques considérées dans l'énoncé correspondent donc des droites qui rencontrent le cercle circonscrit en des points qui correspondent aux points à l'infini de la conique. Les droites qui joignent ces points d'intersection à l'un des sommets du triangle de référence font donc un angle égal à celui des asymptotes de la conique. Si l'on désigne cet angle par 2θ, ces droites envelopperont un cercle concentrique au cercle circonscrit et de rayon $R\cos 2\theta$. On a d'ailleurs $\cos\theta = \frac{1}{e}$; ce rayon est donc égal à $\frac{R(2-e^2)}{e^2}$, même lorsque θ est imaginaire.

Aux deux coniques d'excentricité e qui passent par un point du plan correspondent les deux tangentes à ce cercle menées par le point correspondant. L'angle de ces deux tangentes est d'ailleurs égal à $2V$. En effet, les parallèles à ces tangentes menées par le point A correspondent aux droites qui joignent le point A aux quatrièmes points d'intersection des coniques avec le cercle circonscrit et, en vertu du théorème de Joachimstahl, l'angle de ces deux droites est double de celui des axes des deux coniques. De plus, dans le cas où les coniques sont des hyperboles, on voit, par de simples considérations de mesures d'angle, en regardant les points d'intersection des droites avec le cercle circonscrit comme transformés des points à l'infini des deux coniques, que, si V est l'angle des axes *homologues* des coniques, c'est l'angle des deux tangentes, dans lequel n'est pas compris le cercle, qui est égal à $2V$. Le lieu du point de concours des tangentes est donc un cercle concentrique au

cercle circonscrit et de rayon $\frac{R\cos 2\theta}{\cos V}$ ou $\frac{R(2-e^2)}{e^2\cos V}$ dans le cas où l'angle des asymptotes est imaginaire. Le lieu demandé est donc une courbe du quatrième ordre ayant pour points doubles les trois sommets du triangle et tangente à la droite de l'infini aux points cycliques. C'est donc une courbe unicursale et fermée. Sa forme dépend de la grandeur du rayon du cercle dont elle est la transformée.

Si les coniques sont des ellipses ou des paraboles, ou

Fig. 1.



si l'on a $2\theta < V$, les coniques étant des hyperboles, le cercle est extérieur au cercle circonscrit. La courbe est alors complètement extérieure au triangle. On la construit très aisément en déterminant dans quelle région par rapport au triangle et au cercle circonscrit se trouvent les points correspondant à un arc déterminé du cercle. On a marqué d'un même numéro les arcs correspondants de la courbe et du cercle. On peut obtenir les tangentes au point A, par exemple, en prenant les droites antiparallèles par rapport à l'angle A de celles qui joignent le point A aux points d'intersection du cercle avec BC.

Si l'on avait $\cos V = 0$, c'est-à-dire $V = \frac{\pi}{2}$, le cercle deviendrait la droite de l'infini, et la courbe se réduirait au cercle circonscrit, ce qui est d'ailleurs évident.

Supposons maintenant que les coniques soient des hyperboles, et soit d'abord $V = 2\theta$. Ce cercle se confond alors avec le cercle circonscrit, et le lieu se réduit aux trois côtés du triangle et à la droite de l'infini, ce qu'on pouvait prévoir géométriquement.

Soit maintenant $V > 2\theta$, mais

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos V} > \cos A > \cos B > \cos C.$$

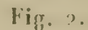
On suppose, pour fixer les idées, $A < B < C$. Le cercle est alors intérieur au cercle circonscrit, mais coupe les trois côtés du triangle. Les points doubles sont encore réels, et, en étudiant point par point la correspondance des deux courbes, on a la forme ci-contre.

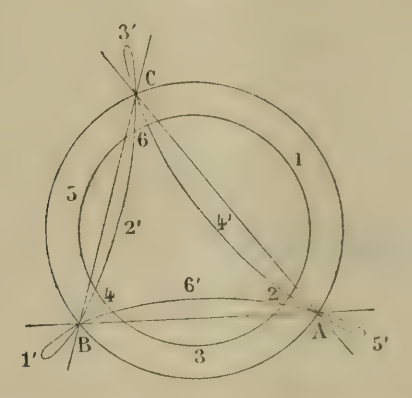
Si $\frac{\cos 2\theta}{\cos V} = \cos A$, un des points doubles devient un point de rebroussement, et, si $\frac{\cos 2\theta}{\cos V} < \cos A$, il devient un point double isolé. On peut avoir ainsi successivement diverses formes intermédiaires. Si $\frac{\cos 2\theta}{\cos V} < \cos C$, on a un anneau fermé avec trois points doubles isolés. Dans le cas où le triangle est équilatéral et où

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos V} = \frac{1}{2},$$

le lieu est une hypocycloïde à trois rebroussements. Enfin, si $\cos 2\theta = 0$, le lieu se réduit au point de concours des hauteurs, quel que soit $\cos V$. Les coniques sont, en effet, alors des hyperboles équilatères, et il n'en passe qu'une par chaque point du plan, sauf par le point de concours des hauteurs.

Pour avoir l'équation du lieu, formons l'équation du cercle concentrique au cercle circonscrit et de rayon ρ.


Fig. 2.



Les équations de ces deux cercles rapportés à deux diamètres rectangulaires sont de la forme

$$R^2 - x^2 - y^2 = 0,$$
$$\rho^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

En coordonnées trilinéaires, ces équations deviennent

$$aYZ + bZX + cXY = 0,$$
$$aYZ + bZX + cXY + K(aX + bY + cZ)^2 = 0,$$

a, b, c étant les longueurs des côtés du triangle de référence; il s'agit de déterminer la constante K.

Pour cela, remarquons que les formules par lesquelles on passe des secondes équations aux premières sont de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= p - x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ Y &= q - x\cos\beta - y\sin\beta, \\ Z &= r - x\cos\gamma - y\sin\gamma. \end{aligned} \right.$$

On a identiquement

$$aYZ + bZX + cXY = \lambda(R^2 - x^2 - y^2).$$

Pour déterminer λ, il suffit de remarquer que, le carré

du module de la substitution (1) étant égal à $\frac{S^2}{R^2}$, on a, le discriminant d'une forme quadratique étant un invariant,

$$\lambda^3 R^2 = \frac{abc}{4}\,\frac{S^2}{R^2} = \frac{S^3}{R},$$

d'où

$$\lambda = \frac{S}{R}.$$

On a donc identiquement

$$R^2 - x^2 - y^2 = \frac{R}{S}(aYZ + bZX + cXY)$$

et

$$\rho^2 - x^2 - y^2 = \frac{R}{S}(aYZ + bZX + cXY) + (\rho^2 - R^2)\frac{(aX + bY + cZ)^2}{4S^2}.$$

L'équation du cercle est donc

$$abc(aYZ + bZX + cXY) + (\rho^2 - R^2)(aX + bY + cZ)^2 = 0,$$

et l'équation du lieu

$$abcXYZ(aX + bY + cZ) + (\rho^2 - R^2)(aYZ + bZX + cXY)^2 = 0,$$

car il suffit de remplacer X, Y, Z par $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$.

On peut remarquer qu'il résulte de la solution précédente que l'enveloppe de la famille de coniques considérée dans l'énoncé est une courbe de même forme.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1889.

Composition française.

De tout temps les progrès de la Science ont exercé sur la civilisation une influence considérable. Dans notre siècle surtout, d'importantes transformations sociales ont été amenées par des découvertes qui, à l'origine, semblaient être de l'ordre le plus abstrait.

Composition de Physique et Chimie.

I. Détermination de l'indice de réfraction d'un liquide à l'aide du goniomètre. (On ne décrira ni l'instrument ni son réglage.)

II. Densité des gaz; méthode de Regnault pour la déterminer.

III. L'acide phosphorique et ses divers hydrates.

Composition de Mathématiques.

Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX et OY, et deux séries de paraboles : les unes (P), de paramètre p, tangentes à OY du côté des X positifs et ayant leur axe parallèle à OX; les autres (Q), de paramètre q, tangentes à OX du côté des Y positifs et ayant leur axe parallèle à OY; on demande :

1° De trouver le lieu décrit par le centre d'une conique qui se déplace, sans changer de grandeur, en passant constamment par les points communs à l'une des paraboles (P) et à l'une des paraboles (Q);

2° De démontrer que, quand on associe une parabole P et une parabole Q, de manière que la droite qui joint leurs foyers respectifs reste constamment parallèle à une direction donnée, la somme des angles que font les tangentes communes

à ces deux paraboles avec un axe fixe, OX par exemple, demeure constante; et de trouver, dans ces conditions, le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles;

3° De placer une parabole P et une parabole Q de façon qu'elles aient trois points communs confondus en un seul, et de calculer, pour cette position des deux courbes, les coordonnées de leur point commun et le coefficient angulaire de leur tangente commune en ce point;

4° De démontrer que tout triangle circonscrit à la fois à l'une quelconque des paraboles P et à l'une quelconque des paraboles Q est inscrit dans une conique fixe, et de trouver l'équation de cette conique.

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 22624^{m},86, \qquad b = 32923^{m},54, \qquad c = 28935^{m},95.$$

Calculer les trois angles et la surface.

Lavis.

Faire à l'encre de Chine et à teintes plates le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères.

La surface du solide sera supposée dépolie.

On ne passera pas de teinte sur le fond.

Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver.

Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.

Épure.

L'axe vertical d'un cône de révolution se projette horizontalement en un point situé à 92^{mm} du grand côté inférieur de la feuille placée horizontalement (l'en-tête à gauche), et à 96^{mm} à droite du trait noir qui la limite; sa hauteur est de 109^{mm}, et le rayon de son cercle de base est de 55^{mm} : une distance de 85^{mm}, comptée parallèlement aux petits côtés de la feuille, sépare la projection horizontale du centre de ce cercle de sa projection verticale.

L'axe horizontal d'un cylindre de révolution de front est à

11^{mm} de l'axe du cône : il se projette horizontalement entre le pied de cet axe et le grand côté inférieur de la feuille, et verticalement à 49^{mm} de la base du cône du côté du sommet; son rayon est tel qu'il passe par le point situé à la même cote (49^{mm}) sur celle des génératrices de profil du cône dont la trace est la plus éloignée du grand côté inférieur de la feuille.

On demande :

De représenter, par sa projection horizontale, par sa projection sur un plan vertical parallèle aux génératrices du cylindre et par ses contours apparents, ce qui reste, entre le sommet et la base, du cône solide entaillé par le cylindre;

De développer, à droite et à la partie supérieure de la feuille, la portion de surface conique qui limite le corps, cette surface étant fendue suivant la génératrice de profil dont la trace est la plus éloignée du grand côté inférieur de la feuille;

D'indiquer les constructions nécessaires pour déterminer : 1° un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point; 2° les points situés sur les contours apparents du cône et du cylindre; 3° un point quelconque du développement et la tangente en ce point.

Les constructions, les tangentes et les parties enlevées seront tracées en rouge continu; la représentation du corps sera seule en noir, trait plein pour les parties vues, points ronds pour les parties cachées.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1889;

PAR M. J. LEMAIRE,

Professeur au lycée de Lorient.

I. Si nous désignons par b l'ordonnée de l'axe d'une parabole P, par a l'abscisse de l'axe d'une parabole Q, les paraboles P auront pour équation générale

$$(P)\qquad (y-b)^2-2px=0$$

et les paraboles Q

$$(Q)\qquad (x-a)^2-2qy=0.$$

Les paraboles P et Q ayant leurs axes perpendiculaires, toute conique (C) passant par les points de rencontre d'une des paraboles P et d'une des paraboles Q aura ses axes parallèles aux axes de ces paraboles, c'est-à-dire à Ox et Oy.

Si donc (x_0, y_0) est le centre de C, l'équation de cette conique sera de la forme

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

Il s'agit de trouver le lieu du centre de cette conique à la condition qu'elle passe constamment par les points communs à l'une des paraboles P et à l'une des paraboles Q.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des deux paraboles P et Q correspondant à deux valeurs déterminées de a et b est

$$(1) \qquad [(y - b)^2 - 2px] + \lambda[(x - a)^2 - 2qy] = 0,$$

qui représentera la conique C si l'on a

$$\frac{A}{\lambda} = \frac{B}{1} = \frac{Ax_0}{p + \lambda a} = \frac{By_0}{b + \lambda q} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 - 1}{b^2 + \lambda a^2}.$$

Éliminant λ, a, b entre ces relations, nous aurons le lieu du centre. On tire sans difficulté

$$\lambda = \frac{A}{B},$$

$$a = \frac{Ax_0 - Bp}{A},$$

$$b = \frac{By_0 - Aq}{B}.$$

d'où le lieu cherché

$$B\left[\frac{(By_0 - Aq)^2}{B^2} + \frac{A}{B}\,\frac{(Ax_0 - Bp)^2}{A^2}\right] = Ax_0^2 + By_0^2 - 1$$

ou

$$2Bpx + 2Aqy = \frac{A^2q^2}{B} + \frac{B^2p^2}{A} + 1.$$

Cette équation représente une droite.

Si l'on fait tourner la conique C de 90° autour de son centre, son équation devient

$$B(x - x_0)^2 + A(y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

A cette position de la conique correspondra une autre droite dont nous aurons l'équation en permutant A et B dans la précédente. Le lieu des centres demandé se compose donc de deux droites.

II. L'équation aux x des points communs à une parabole P et à une droite

$$\text{(D)} \qquad y = mx + n$$

est

$$(mx + n - b)^2 - 2px = 0;$$

d'où, pour la condition de contact de cette courbe et de cette droite,

$$[m(n - b) - p]^2 - m^2(n - b)^2 = 0.$$

On tire de là

$$n = b + \frac{p}{2m}.$$

La tangente à P de coefficient angulaire m est donc

$$y = mx + b + \frac{p}{2m}.$$

On trouve de même pour la tangente à Q de coefficient angulaire m l'équation

$$y = mx - \frac{m}{2}(2a + qm).$$

m sera le coefficient angulaire d'une tangente commune si l'on a

$$b + \frac{p}{2m} = -\frac{m}{2}(2a + qm)$$

ou

$$qm^3 + 2am^2 + 2bm + p = 0.$$

Telle est l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes à P et Q : il y a trois pareilles tangentes. Soient α_1, α_2, α_3 leurs angles avec Ox; $\tang\alpha_1$, $\tang\alpha_2$, $\tang\alpha_3$ sont les racines de l'équation ci-dessus, et l'on a

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3}{1 - \Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2}$$

$$= \frac{-\frac{2a}{q} + \frac{p}{q}}{1 - \frac{2b}{q}} = \frac{p - 2a}{q - 2b}.$$

Soit, d'autre part, α l'angle que fait avec Ox la droite joignant les foyers de P et Q; on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{b - \frac{q}{2}}{\frac{p}{2} - a} = \frac{2b - q}{p - 2a}.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\cot\alpha,$$

d'où

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = +\alpha + n\pi - \frac{\pi}{2},$$

n étant un nombre entier, ce qui démontre la seconde partie de la question.

Les axes de P et Q ont pour équations

$$y = b,$$

$$x = a.$$

Le lieu de leur point commun est donc la droite

$$2y - q = (p - 2x)\tang\alpha.$$

III. Proposons-nous de déterminer a et b de manière que les paraboles P et Q aient trois de leurs points communs confondus en un seul.

L'équation en λ du système des coniques

$$(y-b)^2 - 2px = 0,$$
$$(x-a)^2 - 2qy = 0$$

est

$$q^2\lambda^3 + 2bq\lambda^2 + 2pa\lambda + p^2 = 0,$$

qu'on obtient sans difficulté en annulant le discriminant du premier membre de l'équation (1).

Les paraboles P et Q auront trois points confondus en un seul si cette équation a une racine triple. λ désignant cette racine, on a

$$\left\{\begin{aligned} 3\lambda &= -\frac{2b}{q},\\ 3\lambda^2 &= \frac{2pa}{q^2},\\ \lambda^3 &= -\frac{p^2}{q^2},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{pq^2},\\ b &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2q},\\ \lambda &= -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\right.$$

Pour cette valeur de λ, (1) représente un système de deux droites dont le centre est précisément le point de contact de P et Q. Les coordonnées de ce point sont

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a + \frac{p}{\lambda},\\ y_1 &= b + q\lambda\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant a, b, λ par leurs valeurs et simplifiant,

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{pq^2}, \\ y_1 &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{p^2 q}. \end{aligned} \right.$$

Quant au coefficient angulaire de la tangente commune en ce point, il a pour valeur

$$-\frac{-2p}{2(y_1-b)} = -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

IV. Soit (x, y) un ombilic des paraboles P et Q. L'équation aux coefficients angulaires des tangentes à P issues de ce point est

$$y = mx + b + \frac{p}{2m}$$

ou

$$2x.m^2 + 2(b-y)m + p = 0.$$

De même, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du même point à Q est

$$qm^2 + 2(a-x)m + 2y = 0;$$

les équations devant avoir les mêmes racines, on a

$$\frac{2x}{q} = \frac{b-y}{a-x} = \frac{p}{2y},$$

d'où

$$xy = \frac{pq}{4}.$$

Ce qui montre que les points de rencontre des tangentes communes à une parabole P et une parabole Q se trouvent tous sur l'hyperbole équilatère représentée par l'équation ci-dessus.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA DEUXIÈME ET DE LA QUATRIÈME PARTIE DE LA QUESTION PROPOSÉE AUX CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1889;

Par M. E. BOREL,
Élève de Sainte-Barbe et de M. Niewenglowski.

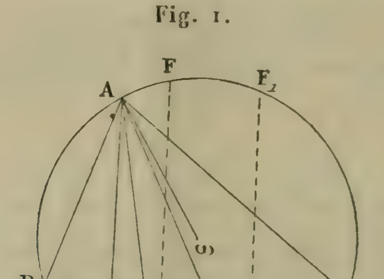
On considère deux paraboles dont les tangentes aux sommets sont deux droites rectangulaires fixes Ox, Oy et dont les foyers décrivent des parallèles à ces droites. Il s'agit de prouver que *la somme des angles que font les trois tangentes communes à ces deux paraboles avec l'axe* Ox *ne dépend que de la direction de la droite* FF'.

Considérons le triangle formé par les trois tangentes communes et le cercle circonscrit à ce triangle. On sait que ce cercle passe par F et F' et que les droites de Simson, relatives aux points F, F' par rapport à ce triangle, sont précisément les droites Ox, Oy. Comme ces droites sont rectangulaires, les points F et F' sont diamétralement opposés. On peut donc, au lieu de FF', considérer la droite ωF, ω étant le centre du cercle, et le théorème à démontrer devient le suivant : *la somme des angles que font les trois côtés d'un triangle avec la droite de Simson relative à un point* F *ne dépend que de l'angle que fait avec cette même droite le rayon* ωF.

Pour le faire voir, examinons ce qui se passe lorsque le point F se déplace sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, ce dernier restant fixe (*fig.* 1). On sait que, si le point F décrit un arc 2α, la droite de Simson relative à ce point subit une rotation égale à $-\alpha$

(elle est, en effet, parallèle à la droite AG, G étant le symétrique de F par rapport à BC, et deux arcs symétriques FF_1 et GG_1 sont égaux et de signes contraires). Il en résulte que l'angle de chacun des côtés du triangle avec cette droite augmente de α; leur somme augmente

Fig. 1.

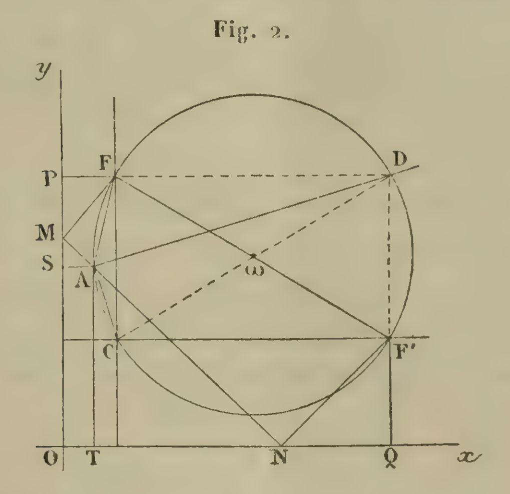


donc de 3α. Or l'angle de ωF avec cette droite augmente aussi de 3α, puisque ωF subit une rotation de 2α et la droite de Simson correspondante, une rotation de $-\alpha$. Il résulte de là que, si le théorème est vrai pour une position particulière du point F, il subsiste quand ce point décrit la circonférence. Or, si nous supposons que le point F coïncide avec un sommet A du triangle, la droite de Simson est la hauteur AH, laquelle fait avec BC un angle égal à $\frac{\pi}{2}$; la somme algébrique des angles qu'elle fait avec AB et AC est égale à $\widehat{HAC} - \widehat{HAB}$, c'est-à-dire à $\widehat{HAC} - \widehat{CA\omega}$ ou à $\widehat{\omega AH}$. On voit donc que la somme des trois angles de la droite de Simson avec les trois côtés surpasse de $\frac{\pi}{2}$ l'angle de ωF avec cette même droite (ces égalités ayant lieu à un multiple de π près, puisque les directions des droites ne sont pas déterminées).

Donc, *la somme des angles que font les tangentes communes avec* Ox *surpasse de* $\frac{\pi}{2}$ *l'angle de* FF′ *avec* Ox.

Il s'agit ensuite de trouver le lieu des points de concours des tangentes communes. Une droite MN (*fig.* 2), coupant Oy en M et Ox en N, est tangente aux deux paraboles si FM et F′N sont perpendiculaires sur MN, et nous venons de voir que les sommets du triangle

Fig. 2.



formé par les tangentes communes sont sur le cercle décrit sur FF′ comme diamètre. Soit A l'un des points de rencontre de MN avec ce cercle. Menons AT, F′Q perpendiculaires sur Ox, AS, FP perpendiculaires sur Oy. Les couples de triangles rectangles ATN, FPM; AMS, F′NQ; AMF, F′NA évidemment semblables, donnent

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FM}}, \qquad \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{F'Q}}{\mathrm{F'N}}, \qquad \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{F'N}}{\mathrm{AN}}.$$

En multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs, on obtient

$$\mathrm{AT}.\mathrm{AS} = \mathrm{FP}.\mathrm{F'Q}.$$

Le lieu du point A est donc l'hyperbole équilatère qui a pour asymptotes Ox, Oy et qui passe par le point de concours C des droites que décrivent les foyers. On peut se demander pourquoi il y a un lieu, alors qu'il semble que l'énoncé contienne une condition de trop. Il en résulte évidemment que chaque point du lieu est obtenu une infinité de fois. On voit en effet que, étant donné un point A du lieu trouvé, pour que ce point soit un point de rencontre des tangentes communes aux deux paraboles de foyers F et F', il faut et il suffit que l'angle FAF' soit droit. On obtient ainsi une infinité de systèmes de deux paraboles pour lesquelles le point A est obtenu comme point du lieu. Ces paraboles sont caractérisées géométriquement par ce fait que le lieu du point de rencontre de leurs axes est une droite. Soit, en effet, D le point de rencontre des axes : CD passant par le milieu ω de FF', centre du cercle, l'angle CAD est droit; la droite AD a donc une direction fixe.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS;

Par M. J. COLETTE,
Ancien répétiteur de Mathématiques.

L'attention a été récemment appelée, dans divers Cours préparatoires, sur certains problèmes très intéressants de la Géométrie du compas ([1]). Cette Géométrie spéciale est particulièrement nécessaire, indispen-

---

([1]) En 1797, le mathématicien italien Mascheroni publia, sous ce même titre : *Geometria del compasso,* un Livre très savant et très élémentaire aussi, dont le capitaine Carette, du Génie, publia, l'année suivante, une excellente traduction.

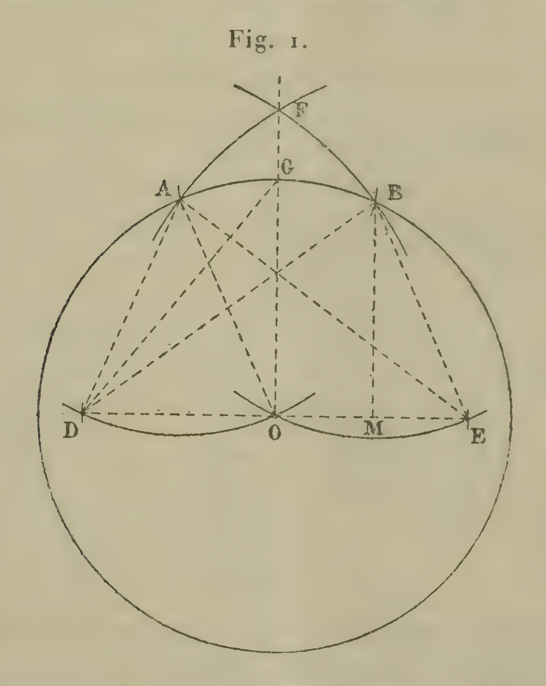
sable même, pour la construction des *épures* géodésiques et géographiques (canevas des Cartes, tracé des méridiens et des parallèles). Nous nous bornerons, ici, à en marquer quelques points importants.

De cette géométrie du compas, qui, « par le secours du compas seulement, détermine la position des points », nous citerons d'abord les deux problèmes suivants :

1° *Trouver, au moyen du compas seulement, le point milieu d'un arc* AB, *dont le centre est en* O.

Solution. — Des deux points A et B comme centres (*fig.* 1), avec le rayon R de l'arc donné, je trace deux

Fig. 1.



arcs sur lesquels je prends DO = OE = AB; puis, des points D et E comme centres, avec DB et EA pour rayons, je trace deux arcs qui se coupent en F; enfin, du point D comme centre, avec OF pour rayon, je trace un arc qui coupe l'arc donné AB en un point G qui est le point cherché.

Supposons le point G déterminé d'avance et traçons toutes les lignes pointillées de la figure, on a

$$\mathrm{DB} = \mathrm{DF},$$

donc

$$\overline{\mathrm{DF}}^2 = \overline{\mathrm{DM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2;$$

en prenant OM = ME, on aura

$$\mathrm{DO} = 2\,\mathrm{OM};$$

par conséquent,

$$\overline{\mathrm{DF}}^2 = 9 \times \overline{\mathrm{OM}}^2 + \mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2$$
$$= 8 \times \overline{\mathrm{OM}}^2 + \mathrm{R}^2.$$

Mais, d'autre part, on a aussi

$$\overline{\mathrm{OF}}^2 = \overline{\mathrm{DF}}^2 - \overline{\mathrm{DO}}^2$$
$$= \overline{\mathrm{DB}}^2 - \overline{\mathrm{DO}}^2$$
$$= 8 \times \overline{\mathrm{OM}}^2 + \mathrm{R}^2 - 4 \times \overline{\mathrm{OM}}^2$$
$$= 4 \times \overline{\mathrm{OM}}^2 + \mathrm{R}^2;$$

or, dans le triangle DOG, on a

$$\overline{\mathrm{DG}}^2 = \mathrm{R}^2 + \overline{\mathrm{DO}}^2$$
$$= \mathrm{R}^2 + 4\,\overline{\mathrm{OM}}^2;$$

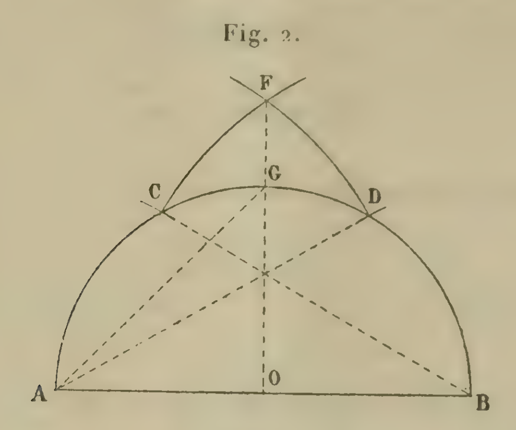
donc DG = OF. C. Q. F. D.

2° *Inscrire un carré dans un cercle, avec le seul emploi du compas.*

La solution est simple; car, en prenant, sur la demi-circonférence ACDB (*fig.* 2), AC = CD = DB = R, la

question revient à trouver le milieu de l'arc CD, comme ci-dessus, et AG est le côté du carré inscrit.

Fig. 2.



La place ne nous permet pas de mentionner la solution générale du joli problème suivant :

Étant donnés deux points, trouver, au moyen du compas seul, le point ou les points qui divisent en 2, 3, 4, ... *parties la ligne qui joindrait ces deux points.*

Nous n'insisterons pas non plus sur les différents problèmes qui ont trait aux opérations suivantes, par le compas seul :

Addition et soustraction de droites dont on ne connaît que les points extrêmes ;

Tracé des droites indéfinies ;

Tracé des droites parallèles ;

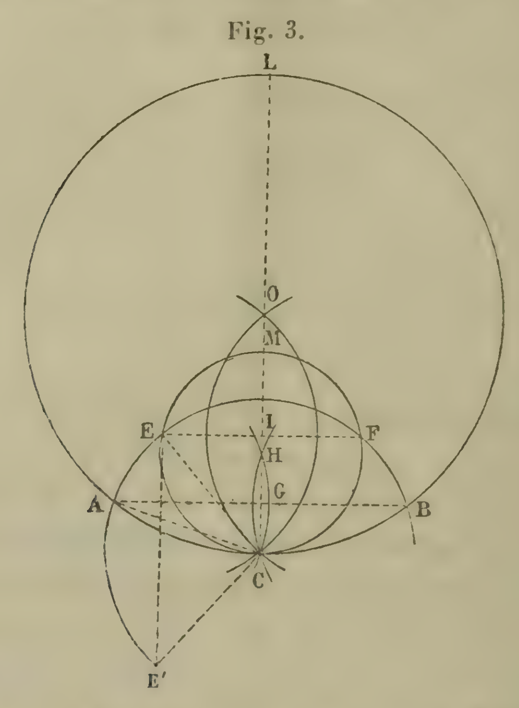
Recherche des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, des points qui divisent une droite en moyenne et extrême raison, etc.

Nous donnerons seulement deux belles solutions du problème suivant, que nous ferons suivre de quelques remarques importantes :

Étant donné un cercle dont on ne connaît pas le centre, trouver ce centre en n'employant que le compas.

Première solution. — D'un point C (*fig.* 3), pris arbitrairement sur le cercle, comme centre, avec un rayon quelconque, je trace un arc de cercle qui coupe la circonférence donnée en deux points A et B. De chacun de

Fig. 3.



ces points, avec le même rayon, je trace deux arcs qui se coupent en C et en H. Je trace le cercle qui a H pour centre et HC pour rayon. Ce cercle coupe le premier arc décrit en deux points E et F; de ces deux points je décris deux arcs avec rayons EC et FC; ces deux nouveaux arcs se coupent en un point O, *centre cherché.*

En effet, traçons les lignes pointillées; nous avons dans le cercle donné

$$\overline{AC}^2 = CG \times CL.$$

En appelant R et r les rayons des cercles entièrement tracés, on a

$$CG = \frac{r}{2}, \qquad CL = 2R:$$

donc

$$\overline{AC}^2 = \frac{r}{2} \times 2R = Rr.$$

Mais, dans le petit cercle, on a

$$\overline{EC}^2 = CI \times CM,$$

et, comme AC = EC, on aura

$$Rr = CI \times CM.$$

Mais CM = $2r$, donc

$$Rr = CI \times 2r;$$

donc

$$R = 2CI = CO. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

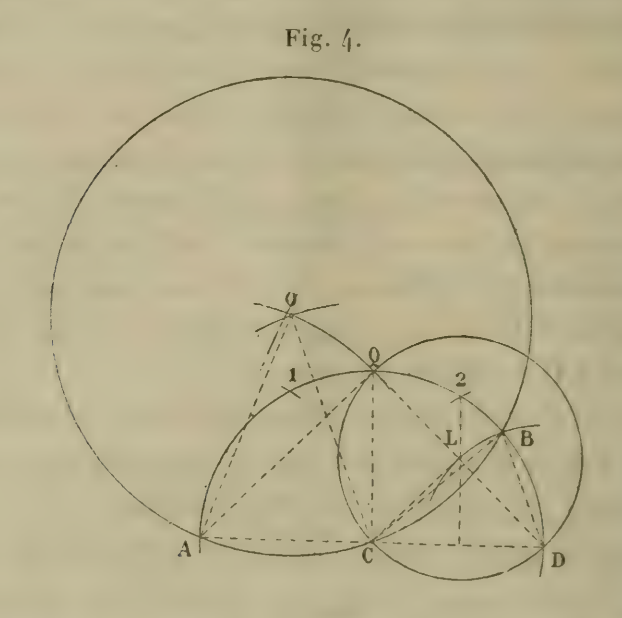
Cette élégante solution, il faut bien le dire, a pourtant un inconvénient considérable : les deux arcs décrits des points A et B comme centres, avec AC pour rayon, se coupent sous un angle aigu. La solution de Mascheroni n'a pas ce défaut, tout en offrant aussi une élégante simplicité.

Seconde solution. — Prenons un cercle et une corde auxiliaire de même grandeur que ci-dessus. Menons du point C (*fig.* 4) deux cordes égales CA et CB et, en décrivant le cercle C12B, arrêtons-le au point D, extrémité du diamètre ACD. Soit B le point où ce cercle coupe le cercle donné ; du point D comme centre, avec DB pour rayon, je trace un arc qui coupe en L un arc de même rayon décrit du point C ; puis, du point L comme centre, avec le même rayon LC, je décris un arc qui coupe en Q le cercle AC : AQ est le rayon du cercle donné dont le centre sera déterminé par deux arcs décrits des points A et C avec ce rayon.

Démonstration. — On voit clairement par la figure

que les deux triangles isoscèles LCD, LCQ sont égaux; que le triangle isoscèle CQA a son angle C supplémentaire du double de l'angle LCD, c'est-à-dire égal à l'angle

Fig. 4.



CLD; les deux triangles CQA et LCD sont donc semblables, et l'on a

$$QA : AC :: CD : CL$$

ou bien, d'après la construction,

$$AO : AC :: CD : DB.$$

On en déduit que les triangles OAC et CBD sont semblables, et, comme ils sont isoscèles, on voit que l'angle ACO est la moitié de l'angle ACB. Les deux triangles ACO et OCB sont donc égaux; il s'ensuit que

$$AO = OB = OC:$$

donc O est le centre cherché. C. Q. F. D.

C'est la solution de Mascheroni. La première solution a été communiquée par M. de Longchamps au *Journal de Mathématiques élémentaires* (année 1878). Nous

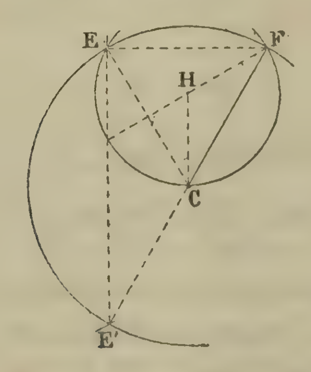
allons voir que ces deux solutions, en apparence si dissemblables, ne sont qu'une seule et même solution.

D'abord il suffit d'un peu d'attention pour constater que la longueur du rayon HC de la première solution n'est autre que le côté BD de la deuxième. Quant à la similitude des deux triangles OAC et CBD de la deuxième solution, elle est presque une évidence que Mascheroni démontre un peu péniblement. En somme, le rayon cherché du cercle donné n'est pas autre chose que la troisième proportionnelle de deux longueurs connues : CA et CH de la première solution, et les mêmes longueurs CD et DB de la seconde.

Quant à la construction d'une troisième proportionnelle, il est intéressant de voir la solution que donne Mascheroni, en employant le seul compas.

Traçons le cercle qui a HC pour rayon (*fig.* 5), et

Fig. 5.



d'un point C de ce cercle décrivons un arc indéfini avec CE pour rayon ; les deux cercles se coupent en E et en F. Du point F, je vais avec le compas, par trois rayons successifs, jusqu'en E'. Alors FE' est un diamètre. Sans entrer dans les détails, on voit que les triangles CEE' et CHF sont semblables ; on a donc

$$CH : CF :: CE : EE' :$$

donc EE′ est la troisième proportionnelle cherchée.

Il suffit de regarder la figure de la première solution ci-dessus (*fig.* 3) pour voir que la ligne EE′ de cette figure est le rayon cherché, d'ailleurs égal à CO par construction.

Quant à la figure de la deuxième solution (*fig.* 4) elle est tout aussi évidente : par le point C passe le cercle dont le rayon CL est égal à BD. Du point C, avec CA pour rayon, nous avons tracé le cercle qui coupe le petit cercle en Q et D ; or, DA étant un diamètre, QA est la troisième proportionnelle, c'est-à-dire le rayon cherché.

Les deux solutions sont donc identiques. C. Q. F. D.

SUR LES CUBIQUES GAUCHES;

Par M. BALITRAND,
Élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons d'appliquer à l'étude des groupes de points sur une cubique gauche une méthode identique à celle que M. Appell a appliquée dans le cas des coniques (*Nouvelles Annales*, janvier 1889) ; et d'en déduire quelques conséquences pour la théorie de ces courbes et pour celles des courbes planes du troisième ordre ayant un point double.

Nous commencerons par donner une démonstration très simple du théorème suivant :

Étant donnée une cubique gauche, par tout point de l'espace, on peut mener une droite qui rencontre cette courbe en deux points réels ou imaginaires conjugués.

Soit P le point donné. La cubique considérée est à

l'intersection de deux surfaces du second degré ayant une génératrice commune. Les plans polaires du point P, par rapport à ces deux surfaces, se coupent suivant une droite, et le plan mené par cette droite et le point P coupe ces deux surfaces suivant deux coniques dont les quatre points d'intersection sont réels, ou dont deux sont réels et deux imaginaires conjugués. Le point P, réel par hypothèse, a même polaire par rapport à ces deux coniques. Donc il est à l'intersection de deux sécantes communes réelles; et l'une de ces sécantes rencontrant la cubique gauche en deux points réels ou imaginaires conjugués, le théorème est démontré.

Cela posé, rappelons que les cubiques gauches sont des courbes unicursales et proposons-nous de trouver la relation qui lie les paramètres de trois points de la cubique situés dans un plan variable passant par un point fixe.

Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)},\\ y &= \frac{a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)},\\ z &= \frac{a_3 t^3 + b_3 t^2 + c_3 t + d_3}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} = \frac{f_3(t)}{\varphi(t} \end{aligned}\right.$$

les équations de la cubique.

Soient P le point fixe et a et b les valeurs du paramètre t pour les points A et B en ligne droite avec P.

Soient

$$R = 0, \qquad S = 0$$

les équations de la droite PAB.

$Q = 0$ étant l'équation d'un plan passant par le point P, l'équation

$$Q + \lambda R + \mu S = 0$$

est l'équation la plus générale des plans passant par ce point.

Dans l'expression $Q + \lambda R + \mu S$, je substitue à x, y, z leurs valeurs (1) en t, et je décompose le numérateur en facteurs du premier degré; j'obtiens ainsi l'identité

$$Q + \lambda R + \mu S \equiv k \frac{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)}{\varphi(t)},$$

où k est indépendant de t.

Dans cette identité, je donne successivement à t les valeurs $t = a$, $t = b$, et je désigne par Q_1 et Q_2 ce que devient Q pour ces valeurs; j'ai

$$Q_1 = k \frac{(a - t_1)(a - t_2)(a - t_3)}{\varphi(a)},$$

$$Q_2 = k \frac{(b - t_1)(b - t_2)(b - t_3)}{\varphi(b)};$$

en divisant,

$$\frac{\varphi(a) Q_1}{\varphi(b) Q_2} = \frac{(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)}{(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)}$$

ou

$$(2) \qquad \frac{(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)}{(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)} = C,$$

C désignant une constante.

Telle est la relation cherchée. Nous allons indiquer très rapidement les formes sous lesquelles on peut la mettre et les théorèmes qui en découlent. (Pour les détails, se reporter à l'article de M. Appell.)

1° *a et b sont réels.* — Par la substitution

$$\frac{t - a}{t - b} = \theta;$$

la relation (2) devient

$$(3) \qquad \theta_1 \theta_2 \theta_3 = C.$$

2° *a et b sont imaginaires conjugués*

$$a = \alpha + \beta i, \quad b = \alpha - \beta i, \qquad C = \cos\omega + i \sin\omega.$$

Pour simplifier la relation (2) et n'y introduire que des éléments réels, nous poserons

$$\frac{\alpha - t}{\beta} = \cot\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\omega}{8}\right);$$

la relation (2) deviendra

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2k\pi.$$

3° $a = b$. — La droite PAB est tangente à la cubique. On trouve une relation de la forme

$$\frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + \frac{1}{a - t_3} = h;$$

d'où, en posant

$$\frac{1}{a - t} = s + \frac{h}{3},$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0.$$

De ces relations résultent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Étant donnée une cubique gauche, par un point* P (*non situé sur une de ses tangentes*) *on peut mener trois plans osculateurs à la courbe. Les points de contact sont réels si les points* A *et* B *sont imaginaires; si les points* A *et* B *sont réels, un point de contact est réel et les deux autres sont imaginaires conjugués.*

Théorème II. — *Les points de contact des plans osculateurs et le point d'où on les mène sont dans un même plan.*

Théorème III. — *Par le point* P *et un deuxième point pris sur la cubique, c'est-à-dire par une droite*

qui rencontre la cubique, on peut mener deux plans tangents à cette courbe; les points de contact ne sont jamais dans un même plan avec la droite intersection des plans tangents.

Théorème IV. — *L'enveloppe des traces des plans osculateurs à la cubique gauche sur un de ses plans osculateurs est une conique.*

En effet, par un point quelconque d'un plan osculateur à la cubique passent deux plans osculateurs seulement, c'est-à-dire deux tangentes à la courbe enveloppe des traces des plans osculateurs à la cubique. Cette courbe est donc une conique.

Théorème V. — *Les plans osculateurs à la cubique, aux points où elle est rencontrée par un plan, se coupent en un point situé dans ce plan.*

Ce théorème est une conséquence presque immédiate du théorème I.

D'après le théorème préliminaire, la perspective d'une cubique gauche est une courbe plane du troisième degré ayant un point double.

D'ailleurs, étant donné un point S et une cubique plane à point double, on peut, d'une infinité de façons, considérer celle-ci comme la perspective d'une cubique gauche, le point de vue étant au point S. Il suffit, en effet, de tracer une conique qui passe au point double et y touche une des tangentes à la cubique, et de la prendre comme directrice d'un cône dont le sommet S' est sur la droite qui joint le point S au point double. Les cônes S et S' ont en commun la génératrice triple SS'. Le reste de l'intersection est une cubique gauche qui se projette suivant la cubique plane considérée.

Dès lors, des propriétés des cubiques gauches on peut

déduire les propriétés des cubiques planes unicursales, et réciproquement.

Commençons par rappeler que, si le sommet du cône projetant une courbe gauche est dans l'un des plans osculateurs de la courbe, la projection présente un point d'inflexion correspondant au point de contact du plan osculateur.

Le théorème I nous donne alors :

Une cubique plane à point double présente trois points d'inflexion en ligne droite. Parmi les trois points d'inflexion, deux sont imaginaires conjugués et un réel, si les tangentes du point double sont imaginaires, c'est-à-dire si ce dernier est un point isolé.

Le théorème III nous montre que, par un point d'une cubique plane unicursale, on peut mener deux tangentes à la courbe.

Inversement, ce théorème bien connu, que les tangentes à une cubique, en trois points en ligne droite, rencontrent la courbe en trois points également en ligne droite, nous donne, pour les cubiques gauches, le résultat suivant :

Par un point M, *on mène trois plans tangents à une cubique gauche, tels que les points de contact soient dans un plan passant par* M; *les troisièmes points d'intersection de ces plans avec la courbe et le point* M *sont dans un même plan.*

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE DROITE;

PAR M. BALITRAND,
Élève à l'École Polytechnique.

M. Genty a considéré (3e série, t. VII, p. 350) le déplacement d'une droite de longueur constante, dont les extrémités A_1 et A_2 glissent sur deux surfaces (S_1) et (S_2), de telle sorte que les normales aux points A_1, A_2 à ces surfaces se rencontrent en un point N. La droite étant assujettie à trois conditions, chacun de ses points, A, décrit une surface (S), et M. Genty a démontré que la normale au point A à la surface S passe en N. Nous nous proposons de donner une démonstration géométrique de ce théorème, puis de le généraliser un peu.

Donnons à la droite un déplacement infiniment petit à partir de sa position initiale. Les plans normaux aux trajectoires de ses différents points se coupent suivant une droite qui passe par le point N, puisque ce point appartient à l'intersection des plans normaux aux trajectoires des points A_1 et A_2. Supposons que l'on communique à la droite un second déplacement infiniment petit. Les plans normaux aux nouvelles trajectoires de ses différents points se coupent encore suivant une droite, qui passe également au point N. La normale au point A à la surface (S) est normale aux trajectoires du point A dans ces deux déplacements; donc elle passe en N.

Imaginons un solide invariablement lié à la droite, c'est-à-dire ne pouvant pas tourner autour de cette droite. Chaque point de ce corps décrira une surface, et l'on sait que, pour un pareil déplacement, il existe deux droites qui rencontrent les normales aux surfaces tra-

jectoires de tous les points du solide. Dans le cas présent, ces deux droites se croisent évidemment au point N; par suite, la normale à la trajectoire d'un point quelconque du solide passe au point N.

Comme cas particulier, considérons le cas où les surfaces (S_1) et (S_2) sont deux plans, et soit L leur intersection. Le plan $A_1 A_2 N$ est perpendiculaire à L, et la normale AN, étant située dans ce plan, reste constamment parallèle à un plan perpendiculaire à L. La surface (S) est donc un cylindre dont les génératrices sont parallèles à L. Pour avoir le degré de ce cylindre, il suffit de considérer le déplacement de la droite dans un plan fixe perpendiculaire à L, le plan $A_1 A_2 N$ par exemple. On a une droite de longueur constante, dont les extrémités glissent sur deux droites fixes. Dès lors le point A décrit, dans ce plan, une conique dont le centre est au point de rencontre des deux droites. Donc, *lorsqu'une droite de longueur constante, dont les extrémités* A_1 *et* A_2 *glissent sur deux plans, se déplace de telle sorte que les perpendiculaires à ces plans, aux points* A_1 *et* A_2, *se coupent constamment, un point quelconque de la droite décrit un cylindre du second degré, dont les génératrices sont parallèles à la droite d'intersection des deux plans, et dont l'axe coïncide avec cette droite.*

TANGENTE EN UN POINT D'UNE COURBE REMARQUABLE;

PAR M. J. POMEY.

Soient n courbes fixes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dans un plan; M un point de ce plan; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les longueurs des

tangentes menées du point M à ces courbes; posons

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{T}_1^2, \qquad t_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{T}_2^2, \qquad \ldots$$

et

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \text{const.}$$

En vertu de cette relation, le point M est assujetti à rester sur une courbe. Je dis que *la normale à cette courbe au point* M *passe par le centre de masse* G *des masses* $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_n}$ *respectivement appliquées aux centres de courbure des courbes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *correspondant aux points de contact des tangentes issues du point* M.

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ les coordonnées de ces centres de courbure par rapport à des axes rectangulaires; R_1, R_2, R_n les rayons de courbure correspondants; x, y les coordonnées du point M. $R_1, R_2, \ldots, R_n$ restent constants quand x et y deviennent $x + dx$, $y + dy$.

On a alors

$$(1) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 = 0,$$

$$2t_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2, \qquad \ldots,$$
$$dt_1 = (x - a_1)\,dx + (y - b_1)\,dy, \qquad \ldots.$$

Les coordonnées X et Y de G sont

$$X \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} = \sum a_1 \frac{\partial f}{\partial t_1},$$
$$Y \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} = \sum b_1 \frac{\partial f}{\partial t_1},$$

et l'équation (1) devient, en supprimant le facteur commun $\sum \frac{\partial f}{\partial t_1}$,

$$(x - X)\,dx + (y - Y)\,dy = 0,$$

qui représente bien l'équation de la normale, si X et Y

y sont considérées comme des coordonnées courantes. Le point (X, Y) est donc situé sur la normale. C. Q. F. D.

Nota. — En ce qui concerne le rayon de courbure ρ de la courbe, lieu du point M, soient $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les projections sur la normale des droites qui joignent le point M aux centres de courbure de $C_1, C_2, \ldots, C_n$; soient R'_1 R'_2, ... les rayons de courbure des développées de ces courbes; soit N la distance GM, on trouve la formule suivante, peu susceptible d'une interprétation simple,

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} d_i d_j + \left(1 + \frac{N}{\rho}\right) \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} - \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} \frac{R'_1}{T_1} \cos^2(\widehat{R_1 ds}) = 0.$$

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PASCAL DONNANT NEUF POINTS EN LIGNE DROITE;

PAR M. AUBERT,

Professeur au lycée de Rochefort.

1. THÉORÈME. — *On considère tous les cercles σ passant par deux points fixes, dont l'un c est sur la circonférence d'un cercle donné s, et l'autre d sur une droite donnée l. Chacun des cercles σ rencontre la droite l en un second point d' et la circonférence s en un second point c'. La droite c'd' passe par un point fixe i de la circonférence s, quel que soit le cercle σ considéré.*

Nous pouvons, en effet, définir tous les cercles σ au moyen d'un troisième point qui décrirait la circonférence s. Or, quelle que soit la position c' de ce point, la droite indéfinie $c'd'$ forme avec cc' un angle qui, compté à partir de cc' dans un sens déterminé, celui des ai-

guilles d'une montre, par exemple, a toujours la même valeur : c'est l'angle cdd' si le point d est extérieur au cercle s, c'est son supplément si le point d est intérieur à ce cercle.

D'ailleurs, le sommet c' de cet angle est sur la circonférence s, et son côté cc' passe par un point fixe de cette circonférence ; donc l'autre côté $c'd'$ rencontre bien la circonférence en un point fixe i.

Si l'on mène par le point g où la droite cd rencontre la circonférence s une parallèle à la droite l, elle passera manifestement par le point i, car on peut considérer la droite indéfinie cd comme la circonférence de rayon infini à laquelle correspond un point d' infiniment éloigné sur la droite l ; gi est donc une position particulière de la droite mobile $c'd'$. Ceci permet de construire immédiatement le point i.

Cela posé, faisons subir à la figure une transformation projective.

Le cercle s deviendra une conique S, les cercles σ donneront le faisceau des coniques Σ passant par quatre points fixes A, B, C, D dont les trois premiers sont sur la conique S, la droite AB provenant de la droite de l'infini de la première figure.

La droite l donnera une droite L passant par le point D.

La propriété démontrée précédemment sera conservée : la droite $C'D'$, qui joint le second point d'intersection D' de chaque conique Σ avec la droite L au quatrième point C' commun aux deux coniques S et Σ, coupera la conique S en un point fixe I.

Voyons ce que devient la construction qui donnait le point i. A la droite gi parallèle à l correspond une droite rencontrant L sur la droite AB. Il suffira donc de joindre le point d'intersection de L et de AB au point G,

où la droite CD coupe la conique S, pour obtenir le point I de cette conique.

Actuellement, rien ne distingue le point C des points A et B. On pourrait, par une nouvelle transformation homographique, projeter la conique S suivant un cercle, en rejetant à l'infini soit AB, soit BC, soit CA. Si, chaque fois, on détermine la position du point *i* sur chaque circonférence, comme on l'a indiqué plus haut, pour qu'on fasse la transformation inverse qui reproduit la conique S, on obtiendra nécessairement le même point I de cette conique, au moyen des constructions transformées.

On est ainsi conduit au résultat suivant :

On donne trois points A, B, C *sur une conique* S, *et un point* D *sur une droite* L. *Soient* α, β, γ *les points d'intersection des droites* BC, CA, AB *avec la droite* L, *et* A', B', C' *les seconds points de rencontre des droites* AD, BD *et* CD *avec la conique* S. *Les trois droites* αA', βB' *et* γC' *se coupent en un même point* I *situé sur la conique* S.

Nous voyons ainsi qu'à un système de quatre points, définis comme nous l'avons fait par rapport à une conique S, et à une droite L correspond un point I parfaitement déterminé de la conique. Si donc, inversement, au lieu de se donner la droite L, on se donne le point I, la droite L sera parfaitement déterminée et passera par les quatre points α, β, γ et D.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Par un point* D *du plan d'une conique, on mène trois sécantes* AA', BB', CC', *et l'on prend un point* I *sur la courbe. Si l'on prolonge chacun des côtés du triangle* ABC *jusqu'à son intersection avec la*

droite qui joint le point I *à la deuxième extrémité de la sécante aboutissant au sommet opposé, on obtient trois points situés sur une même ligne droite qui passe par le point* D.

2. Ce théorème conduit à de nombreuses conséquences.

Construction d'une conique par points. — Tout d'abord, il donne une construction par points d'une conique définie par cinq points, avec cette particularité qu'on détermine à la fois deux nouveaux points de la courbe.

Considérons, par exemple, cinq points I, A, B, A′, B′. Joignons AA′ et BB′ qui se coupent au point D, puis menons par le point I une droite quelconque qui coupe la conique en un point inconnu C. Soit γ le point d'intersection de cette droite et de A′B′. La droite Dγ définit la droite L du théorème. Si donc nous prolongeons IA et IB jusqu'aux points α et β où ces droites rencontrent L, il suffira de joindre αB′ et βA′ pour obtenir à leur intersection le point C′. Le point C sera par suite sur C′D.

On a ainsi autant de couples de points que l'on veut.

Tangente. — Il est facile de construire la tangente à la courbe en l'un des cinq points donnés. A cet effet, imaginons que deux points de la conique sont confondus au point considéré, que nous désignerons pour cette raison par (A′B′). Associons-lui l'un des autres points donnés, où nous supposerons les deux points A et B confondus en (AB). Les droites (AB), (A′B′) et CC′ se coupent en D, I(AB) et C′(A′B′) se coupent au point ($\alpha\beta$). La droite L est ainsi déterminée. Si l'on joint le point γ où IC rencontre cette droite au point (A′B′), on a la tangente cherchée.

3. Avant de donner d'autres applications, remarquons que le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit à une conique est une conséquence directe du théorème précédent.

Considérons en effet l'hexagone inscrit dont les sommets consécutifs sont A, C, C', I, B', B. Les côtés opposés se coupent aux points D, β et γ sur la droite L. L'hexagone peut être concave ou convexe.

Ici se présente une extension remarquable du théorème. Nous avons fait abstraction de la droite DAA' qui joint le point D au sommet A de l'hexagone compris entre B et C. Mais rien ne distingue, au point de vue projectif, ce sommet du sommet I compris entre B' et C'. Si donc on mène la droite DI qui rencontre la conique en un second point I', les droites AI' et B'C' vont aussi se couper sur la droite L en δ.

Observons maintenant que le point D peut être simplement défini comme le point de rencontre de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit à la conique. On peut donc appliquer sans modification le résultat précédent aux deux autres points β et γ, ce qui donnera quatre nouveaux points situés sur la droite L.

En résumé, nous obtenons neuf points en ligne droite, parmi lesquels se trouvent les trois points du théorème de Pascal.

4. Il suffit de particulariser les conditions du théorème pour en déduire autant d'énoncés nouveaux.

Considérons, par exemple, une hyperbole, et supposons que le point I du théorème soit à l'infini sur la courbe, le point D étant lui-même à l'infini dans une direction déterminée. Si de plus nous imaginons que le point A se confonde avec le point I, la droite IA devient une des asymptotes de la courbe ; la droite AA' est rejetée

à l'infini, et l'application du théorème conduit à la propriété suivante :

Soient deux sécantes parallèles rencontrant l'hyperbole aux points B, B′ et C, C′. Les cordes BC et B′C′ vont couper les asymptotes de la courbe en des points situés deux à deux sur deux droites parallèles aux sécantes données.

Chacune de ces droites passe aussi par un des points d'intersection des parallèles aux asymptotes menées par les extrémités de *chacune* des cordes CB′ et BC′.

Cette propriété peut servir à la construction d'une hyperbole.

La méthode de transformation par polaires réciproques permet de déduire des théorèmes précédents autant de propriétés relatives aux tangentes aux coniques.

5. Nous avons montré plus haut comment le théorème de Pascal résulte du théorème que nous venons d'établir.

Il est naturel de chercher si, réciproquement, le théorème de Pascal pourrait conduire à celui-ci.

Les travaux de Plücker, Cayley, Kirkman et autres géomètres contemporains ont établi un grand nombre de résultats relatifs aux hexagones obtenus en joignant de toutes les manières possibles six points d'une conique, et aux droites de Pascal correspondantes. Mais toutes ces recherches ont pour point de départ la figure formée par *six* points déterminés de la courbe, et *six* seulement. Nous n'y voyons pas de propositions relatives à ce septième point de la conique, dont l'introduction forme en quelque sorte le caractère du théorème précédent.

Toutefois, il est facile d'obtenir ce théorème par l'application répétée du théorème de Pascal à *différents*

hexagones ayant pour sommets six des sept points considérés. Voici l'une des manières les plus simples. Considérons les trois hexagones

(1) $IA'ABCC'$,

(2) $IB'BCAA'$,

(3) $IC'CABB'$.

Ils ont un sommet commun I, et chacun des autres se déduit de ceux de l'hexagone précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres.

En prenant la notation habituelle, nous avons les trois pascales correspondantes :

Pour l'hexagone (1)

$$\left\{ \begin{matrix} IA' & A'A & AB \\ BC & CC' & IC' \end{matrix} \right\},$$

pour l'hexagone (2)

$$\left\{ \begin{matrix} IB' & B'B & BC \\ CA & AA' & IA' \end{matrix} \right\},$$

pour l'hexagone (3)

$$\left\{ \begin{matrix} IC' & C'C & CA \\ AB & BB' & IB' \end{matrix} \right\};$$

ce sont les trois droites

$$\alpha D \gamma, \quad \beta D \alpha, \quad \gamma D \beta.$$

Chacune d'elles a deux points communs avec chacune des deux autres. Elles coïncident donc, et les points α, β, γ, D sont bien en ligne droite.

SUR LE PLAN ASYMPTOTE ET LES CYLINDRES ASYMPTOTES D'UNE SURFACE;

Par M. Ch. BIEHLER.

1. Soit

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) + \chi(x, y, z) + \zeta(x, y, z) + \ldots = 0$$

l'équation d'une surface algébrique d'ordre m, ordonnée par groupes homogènes de degrés $m, m-1, m-2, \ldots$.

Coupons cette surface par la droite

$$x = x_0 + \alpha\rho,$$
$$y = y_0 + \beta\rho,$$
$$z = z_0 + \gamma\rho;$$

l'équation qui donne les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersection de la droite et de la surface est

$$\begin{aligned}
&\rho^m \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{m-1}[x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, \beta, \gamma)] \\
&\quad + \frac{\rho^{m-2}}{1.2}[(x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma)^{(2)} \\
&\qquad\qquad + 2(x_0\psi'_\alpha + y_0\psi'_\beta + z_0\psi'_\gamma) + 2\chi(\alpha, \beta, \gamma)] \\
&\quad + \frac{\rho^{m-3}}{3!}[(x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma)^{(3)} \\
&\qquad\qquad + 3(x_0\psi'_\alpha + y_0\psi'_\beta + z_0\psi'_\gamma)^{(2)} \\
&\qquad\qquad + 3.2(x_0\chi'_\alpha + y_0\chi'_\beta + z_0\chi'_\gamma) + 3!\,\zeta(\alpha, \beta, \gamma)] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}$$

Nous écrirons cette équation sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
&\rho^m \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{m-1}\,\Pi(x_0, y_0, z_0) \\
&\quad + \frac{\rho^{m-2}}{1.2}\Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\rho^{m-3}}{3!}\Psi(x_0, y_0, z_0) + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\Pi(x_0, y_0, z_0) = x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_6 + z_0\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, 6, \gamma),$$
$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = (x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_6 + z_0\varphi'_\gamma)^{(2)} + 2(x_0\psi'_\alpha + y_0\psi'_6 + z_0\psi'_\gamma) + 2\chi(\alpha, 6, \gamma),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si la direction α, 6, γ est choisie de telle sorte que

$$\varphi(\alpha, 6, \gamma) = 0,$$

et si les coordonnées x_0, y_0, z_0 satisfont à la relation

$$\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

la droite rencontrera la surface en deux points à l'infini.

Le plan $\Pi(x, y, z) = 0$ est parallèle à la sécante, et comme, dans l'hypothèse de $\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0$, le point x_0, y_0, z_0 de cette sécante se trouve dans le plan, elle y est contenue tout entière.

Le plan $\Pi(x, y, z) = 0$ est donc le lieu des droites parallèles à la direction $\alpha, 6, \gamma$ qui rencontrent la surface en deux points au moins à l'infini; ce plan est dit un *plan asymptote de la surface*.

Ce plan coupe la surface suivant une courbe d'ordre m, qui a un point double à l'infini dans la direction $\alpha, 6, \gamma$, et les tangentes en ce point double sont les droites d'intersection du plan $\Pi(x, y, z) = 0$ et de la surface du second ordre $\Phi(x, y, z) = 0$.

En effet, considérons un point x_0, y_0, z_0 commun à la surface $\Phi(x, y, z) = 0$ et au plan $\Pi(x, y, z) = 0$. Menons par ce point une droite parallèle à la direction α, $6, \gamma$; nous allons démontrer que cette droite est tout entière sur la surface $\Phi(x, y, z) = 0$.

Nous allons faire voir pour cela que l'équation du second degré qui donne les valeurs de ρ correspondant

aux points d'intersections de la droite en question et de la surface Φ est une identité.

Posons, pour abréger,

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z) + h,$$

$f(x, y, z)$ étant l'ensemble homogène des termes du second degré, $g(x, y, z)$ les termes du premier degré, et h le terme indépendant des variables de la fonction Φ.

L'équation en ρ sera

$$\rho^2 f(\alpha, \beta, \gamma) \\ + \rho[x_0 f'_\alpha + y_0 f'_\beta + z_0 f'_\gamma + g(\alpha, \beta, \gamma)] + \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Or on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma)^{(2)} = m(m-1)\varphi(\alpha, \beta, \gamma);$$

donc

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$f'_\alpha = 2(\alpha\varphi''_{\alpha^2} + \beta\varphi''_{\alpha\beta} + \gamma\varphi''_{\alpha\gamma}) = 2(m-1)\varphi'_\alpha,$$
$$f'_\beta = 2(\alpha\varphi''_{\beta\alpha} + \beta\varphi''_{\beta^2} + \gamma\varphi''_{\beta\gamma}) = 2(m-1)\varphi'_\beta,$$
$$f'_\gamma = 2(\alpha\varphi''_{\gamma\alpha} + \beta\varphi''_{\gamma\beta} + \gamma\varphi''_{\gamma^2}) = 2(m-1)\varphi'_\gamma,$$
$$g(\alpha, \beta, \gamma) = 2(m-1)\psi(\alpha, \beta, \gamma);$$

par suite,

$$x_0 f'_\alpha + y_0 f'_\beta + z_0 f'_\gamma + g(\alpha, \beta, \gamma) \\ = 2(m-1)[x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, \beta, \gamma)].$$

Le coefficient de ρ et le terme indépendant dans l'équation du second degré sont aussi nuls : elle se réduit donc à une identité ; la droite fait dès lors partie de la surface. Le plan asymptote coupe donc la quadrique

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

suivant une seconde droite, et si l'on mène par un point de cette seconde droite une sécante parallèle à la direction α, β, γ, le calcul précédent nous montre que cette

sécante est tout entière sur la surface. Le plan asymptote coupe donc la surface $\Phi(x, y, z) = 0$ suivant un système de deux droites parallèles, et chacune de ces droites ne rencontre plus la surface d'ordre m qu'en $m - 3$ points à distance finie; ces deux droites sont deux asymptotes de la courbe d'intersection du plan asymptote et de la surface d'ordre m.

2. Ceci a lieu tant que les quantités $\varphi'_\alpha, \varphi'_\beta, \varphi'_\gamma$ ne sont pas toutes nulles. Supposons que ces quantités soient nulles à la fois et que $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ soit aussi nul; l'équation en ρ s'abaisse au degré $m - 2$ et devient

$$\frac{\rho^{m-2}}{2!}\Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\rho^{m-3}}{3!}\Psi(x_0, y_0, z_0) + \ldots = 0.$$

Nous allons démontrer que, dans cette hypothèse, la quadrique $\Phi(x, y, z) = 0$ devient un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction α, β, γ.

En effet,

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z) + h.$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Phi'_x &= x\varphi''_{\alpha^2} + y\varphi''_{\alpha\beta} + z\varphi''_{\alpha\gamma} + \psi'_\alpha,\\
\tfrac{1}{2}\Phi'_y &= x\varphi''_{\beta\alpha} + y\varphi''_{\beta^2} + z\varphi''_{\beta\gamma} + \psi'_\beta,\\
\tfrac{1}{2}\Phi'_z &= x\varphi''_{\gamma\alpha} + y\varphi''_{\gamma\beta} + z\varphi''_{\gamma^2} + \psi'_\gamma;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\alpha\Phi'_x + \beta\Phi'_y + \gamma\Phi'_z)\\
&\quad = (m-1)[x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, \beta, \gamma)].
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites, le second membre est nul, quelles que soient les valeurs de x, y, z; par suite,

$$\alpha\Phi'_x + \beta\Phi'_y + \gamma\Phi'_z = 0,$$

quels que soient x, y, z; la surface est donc un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction α, β, γ. Nous dirons que c'est un cylindre asymptote. Cette dé-

nomination est justifiée par la propriété suivante de ce cylindre, *c'est le lieu des droites parallèles à la direction* α, β, γ *qui rencontrent la surface en trois points à l'infini.*

Tout plan parallèle aux génératrices de ce cylindre coupe la surface suivant une courbe d'ordre m, et les génératrices d'intersection du cylindre et du plan sont deux asymptotes parallèles de cette courbe.

On peut montrer, de plus, que les deux surfaces

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$
$$\Psi(x, y, z) = 0$$

se coupent suivant six droites qui rencontrent la surface en quatre points à l'infini.

Il suffit, pour le faire voir, de considérer un point commun aux deux surfaces Φ et Ψ, et de mener par ce point une parallèle à la direction α, β, γ; cette parallèle est tout entière sur chacune des deux surfaces. Si l'on forme, en effet, l'équation en ρ correspondant aux intersections de la droite et de la surface $\Psi(x, y, z) = 0$, cette équation est une identité, en vertu des propriétés des fonctions homogènes; l'intersection des deux surfaces Φ et Ψ ne peut donc être qu'un système de droites parallèles à la direction α, β, γ. Comme Φ est du deuxième degré et Ψ du troisième degré, cette intersection est un système de six droites.

Si l'on coupe la surface d'ordre m par un plan passant par l'une de ces six droites, la section sera une courbe d'ordre m qui admet cette droite comme asymptote d'inflexion, et la seconde droite d'intersection du cylindre Φ avec le plan sécant, comme asymptote ordinaire; deux des asymptotes parallèles de la section obtenue en coupant la surface d'ordre m par un plan passant par deux des six droites sont d'inflexion.

3. Si la fonction $\Phi(x, y, z)$ est identiquement nulle pour toute valeur des variables x, y, z, on montrerait de même que la surface $\Psi(x, y, z) = 0$ est un cylindre du troisième ordre, dont les génératrices sont parallèles à la direction α, β, γ; ce cylindre est alors le lieu des droites parallèles à la direction α, β, γ qui rencontrent la surface d'ordre m en quatre points à l'infini : c'est le cylindre asymptote du troisième ordre, ainsi de suite. On établirait pour cela la relation identique

$$\alpha\Psi'_x + \beta\Psi'_y + \gamma\Psi'_z = 0,$$

comme nous avons établi la précédente, et cette relation exprime que la surface $\Psi(x, y, z) = 0$ est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction α, β, γ. Ces calculs n'offrent aucune difficulté.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mathématiques spéciales. Première Partie : *Algèbre;* par M. *G. de Longchamps,* professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne. 2e édition. Paris, Ch. Delagrave; 1889. Prix : 11fr25.

PRÉFACE.

Cette nouvelle édition est conforme au dernier programme d'admission à l'École Polytechnique. Pour ce motif, la première édition, écrite en vue d'un programme différent, a dû être remaniée en certains points. Nous avons aussi tenu compte, en plusieurs cas, des conseils qu'on a bien voulu nous adresser. Dans ces conditions, le Livre que nous présentons aujourd'hui aux élèves du Cours de Mathématiques spéciales pourra, nous l'espérons, leur être de quelque utilité pour la préparation de leurs examens. Nous avons placé dans le corps de l'Ouvrage.

ainsi qu'au Chapitre final, un grand nombre d'exercices, accompagnés d'un aperçu des solutions qu'ils comportent. En travaillant ces exercices, les candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale se perfectionneront dans la connaissance de leurs cours. En même temps, ils s'habitueront à résoudre les questions, si diverses, qu'on leur propose dans les examens auxquels ils se destinent.

M. Neuberg, professeur à l'Université de Liège, a eu la grande obligeance de relire avec moi les épreuves de cette édition. Il a bien voulu, à ce propos, me communiquer de nombreuses et utiles observations. Qu'il me permette de lui adresser ici, pour toute la peine qu'il s'est ainsi donnée, l'expression de ma bien vive et très affectueuse reconnaissance.

Leçons d'Algèbre, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles du Gouvernement; par M. *E. Amigues,* ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur de Mathématiques spéciales au lycée et chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Marseille. Paris, Félix Alcan; 1890. Prix : 10fr.

PRÉFACE.

Ce Livre s'adresse surtout aux candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure. C'est indiquer clairement les matières qu'on y traite. Reste à expliquer comment on les a traitées.

Nous n'avons jamais perdu de vue qu'il importe d'étudier les procédés et d'en pénétrer l'esprit, et non d'apprendre beaucoup de résultats, le nombre des théorèmes fondamentaux étant, après tout, fort restreint. Pour s'en assurer, le lecteur n'a qu'à examiner le Chapitre des séries, ou bien encore la fin du Chapitre relatif au théorème de Descartes.

Nous avons adopté sans réserve les habitudes de rigueur qui ont enfin prévalu dans l'enseignement, et dont Cauchy a donné le premier exemple; mais nous avons fait tous nos efforts pour demeurer clair et simple.

Nous n'avons pas hésité, pour certaines démonstrations, à

opérer sur des exemples particuliers; mais nous ne l'avons fait que dans les cas où la généralité du théorème est absolument manifeste. Cette méthode, qui est sans inconvénient dans les cas que nous signalons, a l'immense avantage de rendre inutiles ces notations surchargées dont l'effet le plus clair est de détourner de l'objet principal l'attention de l'esprit, et par là même de lui masquer le point décisif de la question.

Toute considération géométrique a été rigoureusement exclue des démonstrations. Nous avons donné, il est vrai, quelques interprétations géométriques; mais elles ne figurent qu'à titre d'éclaircissement, et le lecteur peu familier avec la Géométrie analytique pourra les négliger.

Enfin, si nous avons indiqué à la fin de certains Chapitres un grand nombre d'exercices, en revanche, dans le corps de l'Ouvrage, nous n'avons donné d'applications et d'exemples numériques que lorsque la clarté l'exigeait. Mais, dans ces cas, fort rares d'ailleurs, nous avons beaucoup insisté. Le lecteur pourra s'en convaincre en examinant, par exemple, la définition de la dérivée.

Dans la partie la plus difficile de notre tâche, c'est-à-dire dans le Livre II, nous nous sommes souvent inspiré de l'excellent Ouvrage de M. Tannery (1). Pourtant, dans la question si délicate des nombres incommensurables, nous avons cru devoir adopter la méthode de M. Heine, qui consiste à partir d'une suite illimitée de nombres et de la définition de la limite donnée par Cauchy (2).

Cours d'Algèbre, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale supérieure et à l'École Polytechnique; par M. *B. Niewenglowski,* docteur ès sciences, ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du

---

(1) *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* Paris, 1886.

(2) *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique.* Paris, 1821.

Conseil supérieur de l'Instruction publique. Tomes I et II. Paris, Armand Colin et Cie; 1890. Prix : 12fr.

PRÉFACE.

La partie du programme des connaissances exigées des candidats à l'École Polytechnique qui porte le titre : *Algèbre,* contient des compléments de l'Algèbre élémentaire, de l'Algèbre supérieure, du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Le présent Ouvrage est le développement de ce programme.

La théorie générale des fonctions a fait, dans ces derniers temps, des progrès considérables; on ne peut se dispenser d'en tenir compte dans l'enseignement, d'où la nécessité de modifier un certain nombre de démonstrations.

Je me suis préoccupé avant tout de la rigueur des raisonnements; mais, dans l'enseignement, ce que l'on gagne en rigueur, on risque souvent de le perdre en simplicité; je sais aujourd'hui combien était périlleuse la prétention de réunir ces deux qualités, la tâche étant peut-être au-dessus de mes forces. Aussi accueillerai-je avec la plus vive reconnaissance les critiques que les lecteurs voudront bien m'adresser, et je m'efforcerai d'améliorer, s'il y a lieu, dans une nouvelle édition, les parties qui m'auront été signalées comme étant défectueuses.

Je n'ai tracé aucune courbe pour représenter la variation des fonctions. Dans le Cours d'Algèbre, on ne peut indiquer pour cet objet qu'un *graphique* fort incomplet, attendu qu'on ne peut encore déterminer le sens de la concavité ni tracer les asymptotes; d'autre part, si le professeur a besoin de construire, dans le Cours de Géométrie analytique, les courbes représentant les fonctions étudiées en Algèbre, la solution de cette question importante pourra être donnée complètement, et les élèves auront, par surcroît, l'occasion de repasser des matières déjà étudiées.

Le texte a été imprimé avec deux caractères différents, les plus petits ayant été réservés à des compléments ou à des questions qui ne figurent pas explicitement dans les programmes, mais dont la lecture pourra être utile aux bons élèves.

NOTE SUR L'ÉQUATION D'EULER ET DE POISSON;

Par M. Lucien LÉVY.

M. Darboux a démontré (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 69) pour les équations de la forme

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{m(1-m)z}{(x-y)^2}$$

et M. Appell a étendu (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 314) aux équations

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

un théorème dont voici l'énoncé :

Si l'on a obtenu une solution quelconque

$$\varphi(x, y)$$

de l'équation (2), *on pourra en déduire la solution plus générale*

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right) = \varphi_1(x, y).$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques.

Je dis que cette propriété est caractéristique des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui peuvent se ramener à la forme (2). En d'autres termes, *si l'on a constaté qu'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre admet en même temps que la solution* $\varphi(x, y)$ *la solution*

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

où a, b, c, d désignent des constantes quelconques, cette équation a nécessairement la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Soit, en effet, l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &\quad + \mathrm{D}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{E}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{F}z + \mathrm{G} = 0. \end{aligned}\right.$$

1° Je vais exprimer qu'elle admet, en même temps que la solution

$$z = \varphi(x, y),$$

toutes les solutions comprises dans la formule

$$z_1 = \varphi(x', y'),$$

où $x' = x - \lambda$ et $y' = y - \lambda$, λ étant une constante quelconque. Remarquons pour cela que

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x'^\alpha\,\partial y'^\beta}.$$

Je puis donc, pour exprimer que z_1 est solution de l'équation (3), me borner à remplacer dans cette équation x par $\lambda + x'$, y par $\lambda + y'$, effacer les accents donnés aux variables et l'indice de z_1, et exprimer que l'équation ainsi obtenue admet les mêmes solutions que l'équation (3). Désignons par A', B', C', ... ce que deviennent les coefficients A, B, C, ... quand on y remplace x par $\lambda + x$ et y par $\lambda + y$. La nouvelle équation sera

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{B}'\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}'\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &\quad + \mathrm{D}'\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{E}'\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{F}'z + \mathrm{G}' = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette équation ait les mêmes solutions que

l'équation (3), il faut et il suffit que leurs coefficients soient proportionnels; nous laissons de côté le cas où la solution d'où l'on part serait fonction de $x-y$ seulement, ce qui peut arriver pour un groupe de solutions, mais non pour toutes les solutions de l'équation (3). On aura donc

$$\frac{B'}{A'}=\frac{B}{A}, \qquad \frac{C'}{A'}=\frac{C}{A}, \qquad \frac{D'}{A'}=\frac{D}{A}, \qquad \cdots$$

Je dis qu'il en résulte que tous les quotients $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\cdots$ sont des fonctions de $x-y$. Posons en effet

$$\frac{B}{A}=f(x,y),$$

on devra avoir

$$f(x+\lambda, y+\lambda)=f(x,y)$$

ou, en supposant que la fonction $f(x,y)$ soit développable par la formule de Taylor,

$$f(x,y)+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}+\ldots=f(x,y).$$

Cette égalité devant avoir lieu quelle que soit la valeur de λ, il en résulte

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

et, par suite,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=\frac{\partial f}{\partial x}(dx-dy)=\frac{\partial f}{\partial x}\,d(x-y);$$

$f(x,y)$ est donc bien une fonction de $x-y$.

2° Nous pouvons donc supposer que les coefficients A, B, C, ... de l'équation (3) sont tous des fonctions de $x-y$. Je vais exprimer que cette équation admet, en même temps que la solution

$$z=\varphi(x,y).$$

toutes les solutions contenues dans la formule

$$z_1 = \varphi(ax, ay),$$

où a désigne une constante arbitraire. Nous poserons encore

$$x' = ax,$$
$$y' = ay.$$

Nous aurons ici

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = a^{\alpha+\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x'^\alpha \partial y'^\beta}.$$

On en conclut, par un raisonnement analogue au précédent, que les deux équations suivantes devront être vérifiées en même temps

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0,$$

$$a^2 A' \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2 B' \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a^2 C' \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a D' \frac{\partial z}{\partial x} + a' E' \frac{\partial z}{\partial y} + F' z + G' = 0,$$

en désignant par A', B', C', ... les valeurs prises par les fonctions A, B, C, ... quand on y remplace x et y par $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$.

On déduit de là

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

$$\frac{A}{aA'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'},$$

$$\frac{A}{a^2 A'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}.$$

Posons

$$\psi(x - y) = \frac{B}{A}$$

et, par suite,

$$\psi\left(\frac{x - y}{a}\right) = \frac{B'}{A'}.$$

Nous devons avoir, quelle que soit la valeur donnée à a,

$$\psi\left(\frac{x-y}{a}\right) = \psi(x-y).$$

Il faut donc que $\psi\left(\frac{x-y}{a}\right)$ soit indépendante de a, c'est-à-dire constante.

Soit de même

$$\psi_1(x-y) = \frac{D}{A},$$

on devra avoir

$$\psi_1(x-y) = \frac{1}{a}\psi_1\left(\frac{x-y}{a}\right).$$

Faisons

$$a = x-y,$$

il vient

$$\psi_1(x-y) = \frac{1}{x-y}, \qquad \psi_1(1) = \frac{k}{x-y}.$$

De même,

$$\frac{E}{A} = \frac{k'}{x-y}.$$

Un raisonnement analogue montre que $\frac{F}{A}$ et $\frac{G}{A}$ sont des fonctions de la forme $\frac{\alpha}{(x-y)^2}$: l'équation proposée devient donc

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{D}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} \\ & + \frac{E}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{F}{(x-y)^2}z + \frac{G}{(x-y)^2} = 0; \end{aligned} \right.$$

les lettres A, B, C, ... désignent maintenant des quantités constantes.

3° Je vais enfin exprimer que l'équation ci-dessus admet, avec la solution

$$z = \varphi(x, y),$$

la solution

$$z_1 = x^k y^{k'} \varphi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Posons encore

$$\frac{1}{x} = x', \qquad \frac{1}{y} = y',$$

nous aurons

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = k x^{k-1} y^{k'} \varphi_1(x', y') - x^{k-2} y^{k'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = k' x^k y^{k'-1} \varphi_1(x', y') - x^k y^{k'-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = x^{k-4} y^{k'} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'^2}$$
$$+ (2 - 2k) x^{k-3} y^{k'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} + k(k-1) x^{k-2} y^{k'} \varphi_1(x', y'),$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = x^{k-2} y^{k'-2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'\, \partial y'}$$
$$- k' x^{k-2} y^{k'-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} - k x^{k-1} y^{k'-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + k k' x^{k-1} y^{k'-1} \varphi_1,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = x^k y^{k'-4} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y'^2}$$
$$+ (2 - 2k') x^k y^{k'-3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + k'(k'-1) x^k y^{k'-2} \varphi_1(x', y').$$

Portons ces valeurs dans l'équation proposée, écrivons $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{y'}$ au lieu de x et de y, effaçons les accents et écrivons z au lieu de φ_1 ; nous obtenons la nouvelle équation

$$A x^{4-k} y^{-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B x^{2-k} y^{2-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$
$$+ C x^{-k} y^{4-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots + G \frac{x^2 y^2}{(x-y)^2} = 0.$$

Cette équation doit admettre les mêmes solutions que la proposée : il faut donc que

$$\frac{A x^{4-k} y^{-k'}}{A} = \frac{B x^{2-k} y^{2-k'}}{B} = \frac{C x^{-k} y^{4-k'}}{C} = \ldots = \frac{G x^2 y^2}{G}.$$

Ces quatre rapports ne peuvent être égaux sans que trois des quatre coefficients soient nuls : d'où deux

hypothèses possibles, puisqu'on ne peut évidemment annuler en même temps A, B et C.

1° $B = C = G = 0$, $A = 1$.

L'équation transformée ne peut dans ce cas être identifiée avec l'équation proposée.

2° $A = C = G = 0$, $B = 1$.

L'équation transformée devient

$$x^{2-k}y^{2-k'}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{D\,x^{-k+3}y^{-k'+1}}{x-y} - k'x^{2-k}y^{1-k'}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{E\,x^{1-k}y^{3-k'}}{x-y} - kx^{1-k}y^{2-k'}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$+ \frac{Fx^2y^2}{(x-y)^2} - \frac{D\,kx^{2-k}y^{1-k'}}{x-y}$$
$$- \frac{E\,k'x^{1-k}y^{2-k'}}{x-y} + kk'x^{1-k}y^{1-k'} = 0.$$

En l'identifiant avec l'équation (5), nous obtenons les trois identités suivantes :

$$\frac{D}{x-y} = \frac{Dx}{y(x-y)} - k'y^{-1},$$
$$\frac{E}{x-y} = \frac{Ey}{x(x-y)} - kx^{-1},$$
$$\frac{F}{(x-y)^2} = \frac{Fx^k y^{k'}}{(x-y)^2} - \frac{kD}{y(x-y)} - \frac{k'E}{x(x-y)} + kk'x^{-1}y^{-1}.$$

On déduit de là

$$\begin{cases} D = k', \\ E = -k, \\ F = 0, \end{cases}$$

ou

$$k' = D = 0,$$
$$-k = E = 0,$$
$$F \text{ indéterminé.}$$

d'où les deux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{k'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{k}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{F}{(x-y)^2} z = 0.$$

La dernière équation se déduit de la précédente si l'on y suppose $k = k'$ (*voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 56). On trouve donc dans tous les cas une équation d'Euler et de Poisson. C. Q. F. D.

SUR LES ÉQUATIONS AUXQUELLES CONDUIT LE PROBLÈME DE LA DIVISION DES ARCS EN TRIGONOMÉTRIE;

Par M. Ch. BIEHLER.

1. Nous nous proposons de démontrer, par voie purement analytique, la réalité de toutes les racines des quatre équations dont dépendent $\cos\frac{a}{m}$ et $\sin\frac{a}{m}$ quand $\cos a$ ou $\sin a$ sont donnés.

Nous ferons usage, pour cela, de la proposition suivante :

L'équation de degré m

$$V_m = (x + \sqrt{x^2-1})^m + (x - \sqrt{x^2-1})^m = 0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 *et* $+1$.

Cette propriété résulte immédiatement de la relation

$$V_m - 2xV_{m-1} + V_{m-2} = 0,$$

qui lie trois fonctions V; elle montre que la suite V_m, $V_{m-1}, \ldots, V_0$ constitue une suite de Sturm; pour $x = -1$, cette suite ne présente que des variations, et, pour $x = +1$, que des permanences.

Cela posé, étudions l'équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, quand on connaît $\cos a$.

I. — Équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, étant donné $\cos a$.

2. Nous partirons, pour la former, de la relation

$$2\cos a = \left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)^m + \left(\cos\frac{a}{m} - i\sin\frac{a}{m}\right)^m.$$

En posant

$$\cos a = \text{A}, \qquad \cos\frac{a}{m} = x,$$

elle devient

$$2\text{A} = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m$$

ou bien

$$\text{V}_m - 2\text{A} = 0.$$

Soit $\Phi(x)$ le premier membre de cette équation

$$\Phi(x) = \text{V}_m - 2\text{A},$$

d'où, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\Phi'(x) = \text{V}'_m.$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les m racines réelles et inégales de l'équation $\text{V}_m = 0$ et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ les $m-1$ racines de l'équation dérivée $\text{V}'_m = 0$; ces racines sont aussi réelles et nous les supposerons rangées dans l'ordre croissant de grandeur. Nous allons établir que ces quantités, qui sont aussi les racines de $\Phi'(x) = 0$, substituées dans $\Phi(x)$, donnent des résultats alternativement de signes contraires; d'après un théorème, conséquence du théorème de Rolle, on aura ainsi établi que

toutes les racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ sont réelles et inégales.

De l'égalité

$$V_m = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m,$$

on tire

$$V'_m = \frac{m}{\sqrt{x^2 - 1}} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m \right].$$

Si donc β est l'une quelconque des racines de $V'_m = 0$, on aura

$$0 = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m - (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})^m,$$

$$V_m(\beta) = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m + (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})^m$$

ou bien, en ajoutant,

$$V_m(\beta) = 2(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m.$$

Or la première égalité donne aussi

$$(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^{2m} - 1 = 0,$$

à cause de la relation

$$\beta - \sqrt{\beta^2 - 1} = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}};$$

par suite,

$$(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m = \pm 1$$

et

$$V_m(\beta) = \pm 2.$$

Or les quantités $V_m(\beta_1)$, $V_m(\beta_2)$, ..., $V_m(\beta_{m-1})$, d'après le théorème de Rolle, ne présentent que des variations; mais $V_m = 0$ a une seule racine entre -1 et β_1 : c'est la racine que nous avons désignée par α_1 ; par suite,

$$V_m(-1), \quad V_m(\beta_1), \quad V_m(\beta_2), \quad \ldots, \quad V_m(\beta_{m-1}), \quad V_m(+1)$$

ont les signes de

$$(-1)^m, \quad (-1)^{m-1}, \quad (-1)^{m-2}, \quad \ldots, \quad (-1), \quad +1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
V_m(-1) &= 2(-1)^m,\\
V_m(\beta_1) &= 2(-1)^{m-1},\\
V_m(\beta_2) &= 2(-1)^{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
V_m(+1) &= 2;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
\Phi(-1) &= 2[(-1)^m - A],\\
\Phi(\beta_1) &= 2[(-1)^{m-1} - A],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Phi(\beta_{m-1}) &= 2[(-1) - A],\\
\Phi(+1) &= 2[(+1) - A].
\end{aligned}$$

A étant en valeur absolue plus petit que 1, les seconds membres n'offrent que des variations; par suite, l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; la première et la dernière des égalités montrent de plus que toutes ces racines sont comprises entre -1 et $+1$.

3. Cherchons maintenant à quelle condition doit satisfaire la quantité A pour que l'équation $\Phi(x) = 0$ ait une racine double. Il faut pour cela que $\Phi(x) = 0$ et $\Phi'(x) = 0$ admettent une racine commune. Soit α cette racine, on devra avoir

$$\begin{aligned}
(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^m - 2A &= 0,\\
(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^m &= 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m - 2A &= 0,\\
(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m - A &= 0.
\end{aligned}$$

Mais la seconde équation nous donne

$$(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^{2m} = 1,$$

d'où

$$(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m = \pm 1.$$

Il faut donc que $A = \pm 1$ pour que l'équation $(x) = 0$ ait une racine double.

Cette condition est aussi suffisante, car alors

$$\Phi(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m \mp 2.$$

Si m est pair,

$$\Phi(x) = \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{m}{2}} \mp (x - \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{m}{2}}\right]^2.$$

Si $A = 1$, la quantité entre parenthèses est de la forme

$$\varphi(x)\sqrt{x^2 - 1},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier en x; par suite,

$$\Phi(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)^2;$$

toutes les racines de $\Phi(x) = 0$ sont donc doubles, excepté les racines -1 et $+1$.

Si $A = -1$, la quantité entre parenthèses est un polynôme entier de degré $\frac{m}{2}$; par suite, toutes les racines sont doubles.

Si m est impair, nous voyons que les racines θ_1, θ_2, ..., θ_{m-1} de l'équation dérivée $\Phi'(x) = 0$, prises de deux en deux, annulent $\Phi(x)$, car nous avons trouvé les formules générales

$$\begin{aligned}
\Phi(-1) &= 2[(-1)^m - A],\\
\Phi(\theta_1) &= 2[(-1)^{m-1} - A],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Phi(\theta_{m-1}) &= 2[(-1) - A],\\
\Phi(+1) &= 2[(+1) - A].
\end{aligned}$$

Ces égalités nous montrent que, si $A = 1$,

$$\Phi(\theta_1) = 0, \quad \Phi(\theta_3) = 0, \quad \Phi(\theta_{m-2}) = 0, \quad \Phi(1) = 0;$$

les $\frac{m-1}{2}$ racines θ_1, θ_3, ..., θ_{m-2} de l'équation dérivée

satisfont donc à l'équation $\Phi(x) = 0$; par suite, $\Phi(x) = 0$ admet les $\frac{m-1}{2}$ racines doubles $6_1, 6_3, \ldots, 6_{m-2}$ et la racine 1 qui est simple.

Si

$$A = -1, \qquad \Phi(-1) = 0,$$
$$\Phi(6_2) = 0, \qquad \Phi(6_4) = 0, \qquad \Phi(6_{m-1}) = 0,$$

les racines $6_2, 6_4, \ldots, 6_{m-1}$ sont donc racines doubles ; de plus, -1 est racine simple de l'équation $\Phi(x) = 0$.

II. — Équation qui donne $\cos \frac{a}{m}$, étant donné $\sin a$.

4. Cette équation se déduit immédiatement de la formule

$$2i \sin a = \left(\cos \frac{a}{m} + i \sin \frac{a}{m}\right)^m - \left(\cos \frac{a}{m} - i \sin \frac{a}{m}\right)^m.$$

Elle devient, en posant $\sin a = B$,

$$\cos \frac{a}{m} = x,$$

$$2iB = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m$$

ou

$$2iB = \frac{m}{V'_m \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$V'_m \sqrt{x^2 - 1} - 2miB = 0.$$

Cette équation est irrationnelle ; l'équation rendue rationnelle est donc

$$V'^2_m (1 - x^2) - 4m^2 B^2 = 0.$$

Soit $\Psi(x)$ le premier membre de cette équation,

$$\Psi(x) = V'^2_m (1 - x^2) - 4m^2 B^2.$$

Nous allons démontrer que $\Psi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

Formons pour cela la dérivée $\Psi'(x)$

$$\Psi'(x) = 2V'_m V''_m(1-x^2) - 2xV'^2_m$$

ou

$$\Psi'(x) = 2V'_m[V''_m(1-x^2) - xV'_m].$$

Or on sait que le polynôme V_m satisfait à l'équation différentielle

$$(1-x^2)V''_m - xV'_m + m^2V_m = 0;$$

par conséquent,

$$V''_m(1-x^2) - xV'_m = -m^2V_m$$

et, par suite,

$$\Psi'(x) = -2m^2V'_mV_m.$$

Les $2m-1$ racines de l'équation $\Psi'(x) = 0$, rangées dans l'ordre croissant, sont donc

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1}, \quad \alpha_m.$$

Or les quantités β substituées dans le premier membre de l'équation $\Psi(x) = 0$ donnent toutes $-4m^2B^2$, par conséquent un résultat négatif.

Pour établir que toutes les racines de $\Psi(x) = 0$ sont réelles, il suffit de démontrer que les quantités α, racines de $V_m = 0$, rendent $\Psi(x)$ positif.

Soit α l'une quelconque des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$;

$$\Phi(\alpha) = V'^2_m(\alpha)(1-\alpha^2) - 4m^2B^2.$$

Or

$$\frac{V'_m(\alpha)\sqrt{\alpha^2-1}}{m} = \left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)^m - \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)^m,$$

$$0 = \left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)^m + \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)^m;$$

d'où

$$\frac{V'_m(\alpha)\sqrt{\alpha^2-1}}{m} = 2\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)^m;$$

par suite,

$$V'^2_m(\alpha)(\alpha^2-1) = 4m^2\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)^{2m}.$$

Mais l'identité

$$(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m=0$$

nous montre que

$$(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^{2m}+1=0;$$

d'où

$$V'^2_m(\alpha)(\alpha^2-1)=-4m^2,$$

ou enfin

$$(1-\alpha^2)V'^2_m(\alpha)=4m^2.$$

$\Psi(\alpha)$ a donc pour valeur

$$\Psi(\alpha)=4m^2-4m^2B^2=4m^2(1-B^2);$$

$\Psi(\alpha)$ est par suite positif.

Les racines de l'équation $\Psi'(x)=0$ sont donc toutes réelles et donnent, quand on les substitue par ordre de grandeur dans $\Psi(x)$, des résultats alternativement de signes contraires; on en conclut que toutes les racines de $\Psi(x)=0$ sont réelles et inégales.

5. Cherchons la condition que doit remplir B pour que l'équation $\Psi(x)=0$ ait une racine double.

Nous avons trouvé l'expression de $\Psi'(x)$,

$$\Psi'(x)=-2m^2V_mV'_m.$$

Si c'est une racine β de l'équation $\Psi'(x)=0$ qui appartient à $\Psi(x)=0$, on devra avoir $B=0$; par suite, $\Psi(x)$ se réduit à

$$V'^2_m(1-x^2);$$

toutes les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ sont doubles et l'équation admet deux autres racines qui sont $+1$ et -1.

Si c'est, au contraire, une racine α de $V_m=0$ qui satisfait à $\Psi(x)=0$, on aura

$$0=(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m,$$

$$2iB=(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m;$$

d'où

$$2iB = 2\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m.$$

Mais on a aussi

$$\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^{2m} + 1 = 0;$$

par suite,

$$B^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad B = \pm 1.$$

Supposons $B^2 = 1$ et formons dans ce cas la fonction $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) = V_m'^2(1 - x^2) - 4m^2$$

ou

$$\Psi(x) = \left(V'_m\sqrt{1 - x^2} - 2m\right)\left(V'_m\sqrt{1 - x^2} + 2m\right);$$

on peut écrire cette équation

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x) = \left(\frac{V'_m\sqrt{x^2 - 1}}{m} - 2i\right)\left(\frac{V'_m\sqrt{x^2 - 1}}{m} + 2i\right)$$

et, si l'on remplace

$$\frac{V'_m\sqrt{x^2 - 1}}{m}$$

par sa valeur qui est

$$\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m,$$

il viendra

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x) = \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - 2i\right] \times \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m + 2i\right]$$

ou

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x) = \frac{\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{2m} - 2i\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - 1\right]}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m} \times \frac{\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{2m} + 2i\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m - 1\right]}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m},$$

ce qui peut s'écrire encore

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x)=\frac{\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m-i\right]^2\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m+i\right]^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^{m2}}$$

ou

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x)=\left[\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{2m}+1}{(x+\sqrt{x^2-1})^m}\right]^2$$

ou enfin

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x)=\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m+(x-\sqrt{x^2-1})^m\right]^2,$$

$$\Psi(x)=-m^2V_m^2.$$

On voit donc que, dans le cas où $B^2=1$, toutes les racines de l'équation $\Psi(x)=0$ sont doubles et égales aux racines α de l'équation $V_m=0$.

III. — Équation qui donne $\sin\frac{a}{m}$, étant donné $\cos a$.

6. L'équation qui donne $\sin\frac{a}{m}$ quand $\cos a$ est donné se déduit de la formule

$$2\cos a=\left(\cos\frac{a}{m}+i\sin\frac{a}{m}\right)^m+\left(\cos\frac{a}{m}-i\sin\frac{a}{m}\right)^m.$$

Soit, comme précédemment,

$$\cos a=A,\qquad \sin\frac{a}{m}=x;$$

l'équation précédente devient

$$2A=(\sqrt{1-x^2}+ix)^m+(\sqrt{1-x^2}-cx)^m$$

Soit

$$U_m=(\sqrt{1-x^2}+ix)^m+(\sqrt{1-x^2}-ix)^m.$$

Si m est pair,

$$U_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m + (x-\sqrt{x^2-1})^m\right]$$

ou

$$U_m = (-1)^{\frac{m}{2}} V_m.$$

L'équation

$$U_m - 2A = 0$$

devient donc dans ce cas

$$(-1)^{\frac{m}{2}} V_m - 2A = 0$$

ou

$$V_m - 2(-1)^{\frac{m}{2}} A = 0.$$

C'est l'équation $\Phi(x) = 0$ traitée tout d'abord.

Si m est impair,

$$U_m = i^m\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m - (x-\sqrt{x^2-1})^m\right],$$

ce qui donne pour l'équation cherchée

$$(x+\sqrt{x^2-1})^m - (x-\sqrt{x^2-1})^m - 2A\,i^m = 0$$

ou

$$V'_m\sqrt{x^2-1} - 2mA\,i^m = 0.$$

$$V'_m\sqrt{1-x^2} - 2m(-1)^{\frac{m-1}{2}} A = 0,$$

qui fournit l'équation rationnelle de degré $2m$

$$V'^2_m(1-x^2) - 4m^2A^2 = 0.$$

qui a été étudiée en second lieu.

IV. — Étant donné $\sin a$, trouver $\sin\frac{a}{m}$.

7. Si l'on pose

$$\sin a = B, \qquad \sin\frac{a}{m} = x.$$

l'équation dont dépend $\sin \frac{a}{m}$ est

$$2iB = (\sqrt{1 - x^2} + ix)^m - (\sqrt{1 - x^2} - ix)^m.$$

Si m est pair, elle devient

$$2iB = \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m\right](-1)^{\frac{m}{2}}$$

ou

$$2iB = V'_m \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{m}$$

ou enfin

$$V'^2_m(1 - x^2) - 4m^2B^2 = 0,$$

équation qui a été étudiée.

Si m est impair,

$$2iB = \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m\right] i^m$$

ou

$$2B = \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m\right](-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

ou enfin

$$V_m - 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} B = 0,$$

qui n'est autre que la première.

Les conditions dans lesquelles ces équations admettent des racines multiples sont donc les mêmes que celles qui ont été trouvées dans les deux premiers cas.

CALCUL DE LA CAPACITÉ ÉLECTROSTATIQUE DE DEUX FILS TÉLÉGRAPHIQUES PARALLÈLES;

Par M. J.-B. POMEY.

Nous calculerons cette capacité pour l'unité de longueur. Le problème est donc ramené à un problème de Géométrie plane, car on peut faire abstraction dans le calcul de la dimension parallèle à l'axe des fils.

Formons d'abord l'équation de Laplace en coordonnées bipolaires. Nous exprimerons que le flux de force total qui sort d'un élément de surface est nul. Cet élément de surface sera le petit parallélogramme compris entre les quatre cercles décrits des pôles O et O′ respectivement avec les rayons r, $r + dr$, r', $r' + dr'$. Soient donc

O et O′ les deux pôles;
a leur distance;
φ, θ, θ' les angles du triangle qui a pour côtés a, r', r, et respectivement opposés à ces côtés;
enfin V le potentiel.

L'un des côtés du parallélogramme élémentaire a pour longueur

$$r \frac{\partial \theta}{\partial r'} dr'.$$

La force normale à ce côté a pour intensité

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r'} \cos \varphi.$$

En tenant compte des relations

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$$

$$\frac{r}{\sin\theta'} = \frac{r'}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\varphi},$$

on voit que le flux de force qui traverse ce côté a pour expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r'}\cos\varphi\right)\frac{1}{\sin\varphi}\,dr'.$$

Le flux qui traverse dans le même sens le côté opposé a pour valeur l'expression précédente, augmentée de sa différentielle relative à un accroissement de r égal à dr.

Or la relation

$$a^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi,$$

différentiée par rapport à r et φ, puis r' et φ, donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r'\cos\varphi - r}{rr'\sin\varphi}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r'} = \frac{r\cos\varphi - r'}{rr'\sin\varphi}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de la différentielle du flux précédent, et sommant les flux qui traversent les quatre côtés du parallélogramme élémentaire, on trouve, pour l'équation de Laplace, au facteur $\frac{dr\,dr'}{\sin\varphi}$ près,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r'^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r'}\,\frac{r^2 + r'^2 - a^2}{2rr'} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r'}\frac{\partial V}{\partial r'} = 0.$$

Posons $V = f(u)$.

Pour $u = r$, on a

$$V = A\log r + B.$$

Pour $u = r^2 - r'^2$, on a

$$V = A(r^2 - r'^2) + B.$$

Pour $u = r + r'$, on a

$$V = A \log\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + B.$$

On obtient ainsi les solutions qui répondent à des cylindres circulaires concentriques, à des plans parallèles, à des cylindres homofocaux.

Nous allons employer la solution $V = A \log \frac{r}{r'} + B$.

Soient

A, B, R, R', d les centres, les rayons, la distance des centres des deux cercles de section droite par un même plan des deux fils télégraphiques parallèles;

$\frac{r}{r'} = C_1$, $\frac{r}{r'} = C_2$ les équations de ces deux cercles;

V_1, V_2 les potentiels des deux fils;

σ la densité en un point M de l'un des fils, A par exemple;

dn l'élément de normale extérieure en M;

θ l'angle MAO;

ψ, ψ' les angles de dn avec OM et MO'.

On aura

$$V = \frac{V_1 - V_2}{\log \frac{C_1}{C_2}} \log \frac{r}{r'} + V_2 \log C_1 - \log C_2.$$

et, d'après l'équation de Coulomb,

$$4\pi\sigma = -\frac{dV}{dn} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dn} - \frac{\partial V}{\partial r'}\frac{dr'}{dn}$$

ou

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{V_1 - V_2}{\log \frac{C_1}{C_2}}\left(\frac{\cos\psi}{r} - \frac{\cos\psi'}{r'}\right).$$

La quantité d'électricité répartie sur l'unité de lon-

gueur du cylindre A a pour expression

$$e = \int_0^{2\pi} \sigma \mathrm{R}\, d\theta.$$

Or on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{R}\, d\theta \cos\psi}{r} = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{R}\, d\theta \cos\psi'}{r'} = 0.$$

En effet, $\frac{\mathrm{R}\, d\theta \cos\psi}{r}$ est l'angle sous lequel on voit du point O l'élément $\mathrm{R}\, d\theta$. Comme le point O est intérieur au cercle, la somme de ces angles est 2π.

De même, $\frac{\mathrm{R}\, d\theta \cos\psi'}{r'}$ est l'angle sous lequel on voit du point O′ l'élément $\mathrm{R}\, d\theta$. Comme les éléments du cercle se masquent l'un l'autre, O′ étant extérieur, la somme de ces angles est nulle.

Donc il vient

$$e = -\frac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2}{2 \log \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}}.$$

Or, si l'on peut supposer les diamètres des fils infiniment petits par rapport à leur distance, on voit que l'on a

$$a = d, \qquad \mathrm{C}_1 = \frac{\mathrm{R}}{a}, \qquad \mathrm{C}_2 = \frac{a}{\mathrm{R}'},$$

et la capacité par unité de longueur est alors

$$\frac{1}{2 \log \frac{d^2}{\mathrm{RR}'}}.$$

UNE APPLICATION DES COORDONNÉES PARALLÈLES;

Par M. M. d'OCAGNE.

Au cours de ses intéressantes recherches géométriques sur les figures imaginaires, M. Tarry a rencontré le théorème suivant :

Si les sommets M *et* N *d'un triangle* MNP *de similitude constante, dont le côté* MN *enveloppe une courbe de classe* m, *décrivent deux droites parallèles, le sommet* P *décrit une courbe d'ordre* m.

M. Tarry, en nous communiquant ce théorème qu'il a obtenu par voie synthétique, ajoutait que sa démonstration analytique devait sans doute se prêter à l'emploi de nos coordonnées parallèles.

Nous allons faire voir, en effet, que cette démonstration s'obtient très simplement par l'emploi combiné des coordonnées parallèlei de droites et des coordonnées parallèles de points pour la définition et les propriétés desquelles nous renvoyons le lecteur aux Mémoires que nous leur avons consacrés ([1]).

D'ailleurs la solution analytique a cet avantage sur la solution géométrique que non seulement elle fait con-

---

([1]) Pour les *coordonnées parallèles de droites*, voir : *Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles* (*Nouvelles Annales*, 1884 et 1885) ou la brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars, 1885), dont ce Mémoire a fourni la majeure partie.

Pour les *coordonnées parallèles de points* : *Nouvelles Annales*, 1887, p. 493.

naître l'ordre de la transformée, mais qu'elle détermine complètement celle-ci.

Le problème que nous nous proposons de résoudre ici est le suivant :

Les sommets M *et* N *d'un triangle* MNP *de similitude constante décrivent deux droites parallèles. Connaissant l'enveloppe du côté* MN, *trouver le lieu décrit par le sommet* P.

Appelons Au et Bv les droites parallèles décrites par les sommets M et N. Nous les prendrons pour axes de coordonnées en supposant l'axe AB des origines perpendiculaire à leur direction commune.

Soient alors u et v les coordonnées parallèles de la droite MN, p et q celles du point P. Celles du côté MP étant u et v', celles du côté NP, u' et v, on a, puisque le point P est à la rencontre de ces droites,

$$pu + qv' = 1,$$
$$pu' + qv = 1,$$

d'où

$$v' = \frac{1 - pu}{q},$$

$$u' = \frac{1 - qv}{p}.$$

Dès lors, si h est la tangente de l'angle constant NMP, on a, d'après la formule (2) de notre premier Mémoire ([1]), en posant $AB = d$,

$$h = \frac{d\left[v - u - \left(\frac{1 - pu}{q} - u\right)\right]}{d^2 + (v - u)\left(\frac{1 - pu}{q} - u\right)}$$

([1]) *Nouvelles Annales*, 1884; p. 413.

ou

(1) $$h = \frac{d(pu + qv - 1)}{d^2 q + (v - u)[1 - (p + q)u]}.$$

De même, k étant la tangente de l'angle constant MNP,

(2) $$k = \frac{d(-pu - qv + 1)}{d^2 p + (v - u)[-1 + (p + q)v]}.$$

De (1) et (2) il faut tirer u et v en fonction de p et q. A cet effet, posons

(3) $$pu + qv - 1 = \varepsilon,$$

(4) $$v - u = \eta,$$

ce qui donne

(5) $$(p + q)u - 1 = \varepsilon - q\eta,$$

(6) $$(p + q)v - 1 = \varepsilon + p\eta.$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

(7) $$hq\eta^2 - h\varepsilon\eta - d\varepsilon + h\,d^2 q = 0,$$

(8) $$kp\eta^2 + k\varepsilon\eta + d\varepsilon + k\,d^2 p = 0.$$

Multiplions la première par $-kp$, la seconde par hq, et faisons la somme ; il vient, après réduction et suppression du facteur commun ε,

$$hk(p + q)\eta + (kp + hq)\,d = 0,$$

d'où

(9) $$\eta = -\frac{d(kp + hq)}{hk(p + q)}.$$

Les équations (7) et (8) additionnées membre à membre donnent

$$(kp + hq)\eta^2 - (h - k)\eta\varepsilon + d^2(kp + hq) = 0.$$

Substituons à η, dans cette équation, sa valeur (9):

nous avons, après réduction,

$$d(kp+hq)^2+hk(h-k)(p+q)\varepsilon+dh^2k^2(p+q)^2=0,$$

d'où

$$(10)\qquad \varepsilon=d\,\frac{(kp+hq)^2+h^2k^2(p+q)^2}{hk(k-h)(p+q)}.$$

Portant les valeurs (9) et (10) de η et ε dans (5), on a

$$u=\frac{\left\{\begin{array}{l}hk(k-h)(p+q)+d(kp+hq)^2\\ \quad+dh^2k^2(p+q)^2+dq(k-h)(kp+hq)\end{array}\right\}}{hk(k-h)(p+q)^2}.$$

Rapprochons, au numérateur, le quatrième terme du second et remarquons que

$$(kp+hq)^2+q(k-h)(kp+hq)=(kp+hq)k(p+q).$$

Nous avons alors

$$u=\frac{h(k-h)+d(kp+hq)+dh^2k(p+q)}{h(k-h)(p+q)}$$

ou

$$(11)\qquad u=\frac{dk(h^2+1)p+dh(hk+1)q+h(k-h)}{h(k-h)(p+q)}.$$

De même, on tire de (6)

$$(12)\qquad v=\frac{dk(hk+1)p+dh(k^2+1)q+k(k-h)}{k(k-h)(p+q)}.$$

Les formules (11) et (12) résolvent le problème que nous avions en vue. On voit que ces substitutions faites dans une équation algébrique de degré m, en u et v, donnent une équation de degré m, en p et q. Donc :

L'ordre du lieu décrit par le sommet P *est égal à la classe de la courbe enveloppée par le côté* MN.

En particulier : si le côté MN pivote autour d'un

point fixe, le sommet P décrit une droite; si le côté MN reste tangent à une conique, le sommet P décrit une conique; etc.

On peut particulariser le problème : par exemple, en supposant les angles en M et en N tous deux égaux à $\frac{\pi}{4}$. Alors $h = -1$, $k = 1$, et les formules (11) et (12) deviennent

$$u = \frac{1 - dp}{p + q}, \qquad v = \frac{1 - dq}{p + q}.$$

Par suite, si le côté MN reste tangent à la conique

$$(13) \qquad A u^2 + 2 B uv + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0,$$

le sommet P décrit la conique

$$(14) \begin{cases} (A d^2 - 2 D d + F) p^2 + 2 [B d^2 - (D + E) d + F] pq \\ \quad + (C d^2 - 2 E d + F) q^2 + 2 [(A + B) d - (D + E)] p \\ \quad\quad - 2 [(B + C) d - (D + E)] q + A + 2 B + C = 0. \end{cases}$$

Quelle est la condition pour que cette conique soit un cercle? Si nous écrivons l'équation (14)

$$A' p^2 + 2 B' pq + C' q^2 + 2 D' p + 2 E' q + F' = 0,$$

nous savons [1] que cette condition se traduit par les relations

$$A' - 2 B' + C' = d^2 F',$$
$$D' - E' = 0.$$

Mais ici

$$A' + 2 B' + C' = d^2 (A - 2 B + C),$$
$$D' - E' = C - A,$$
$$F' = A + 2 B + C.$$

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1887; p. 498. Il faut remarquer que, dans la Note que nous citons ici, nous avons pris pour unité de longueur la demi-distance des origines, ce qui modifie légèrement la forme des résultats.

On doit donc avoir

$$A = C \quad \text{et} \quad B = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (13) doit avoir la même forme que l'équation générale du cercle en coordonnées rectangulaires. Nous avons fait voir ([1]) qu'une telle équation représente l'hyperbole complémentaire d'une hyperbole tangente aux axes Au et Bv.

Donc, *lorsque les angles* M *et* N *sont tous deux égaux à* $\frac{\pi}{4}$, *la condition pour que le lieu du sommet* P *soit un cercle est que l'enveloppe du côté* MN *soit une hyperbole dont la complémentaire soit tangente aux droites parallèles décrites par les sommets* M *et* N.

Nous pourrions signaler encore bien d'autres cas particuliers dignes d'intérêt; nous nous bornerons au précédent qui fait bien ressortir l'avantage, pour la question qui nous occupe, de l'emploi des coordonnées parallèles.

SUR LES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ;

PAR M. CH. BIEHLER.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré à trois variables représente une surface du second ordre d'une nature déterminée.

([1]) N° 66 de notre premier Mémoire (*Nouvelles Annales*, 1885; p. 121).

I. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône.

Considérons l'invariant de la fonction homogène du second degré à quatre variables x, y, z, t

$$\begin{aligned}F(x, y, z, t) &= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\quad + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2,\end{aligned}$$

à savoir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

On a identiquement

$$\Delta t = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \frac{1}{2}F'_x \\ B'' & A' & B & \frac{1}{2}F'_y \\ B' & B & A'' & \frac{1}{2}F'_z \\ C & C' & C'' & \frac{1}{2}F'_t \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$\Delta t^2 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \frac{1}{2}F'_x \\ B'' & A' & B & \frac{1}{2}F'_y \\ B' & B & A'' & \frac{1}{2}F'_z \\ \frac{1}{2}F'_x & \frac{1}{2}F'_y & \frac{1}{2}F'_z & F(x, y, z, t) \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait, dans cette identité, $t = 1$, $F(x, y, z, t)$ devient le premier membre de l'équation de la surface que nous désignerons simplement par F, et, si l'on désigne, pour abréger, par X, Y, Z ce que deviennent les demi-dérivées de F par rapport à x, y, z, l'identité précédente devient

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & F \end{vmatrix}.$$

La surface conique du second ordre est définie par la condition que son centre se trouve sur la surface. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre; pour ces valeurs de x, y, z, on a

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad F = 0;$$

le second membre de l'identité précédente est nul pour ces valeurs : on a donc

$$\Delta = 0.$$

La condition $\Delta = 0$ est donc nécessaire.

Cette condition est aussi suffisante; car, si elle est remplie, on a, pour toutes les valeurs de x, y, z,

$$0 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & F \end{vmatrix};$$

on en déduit

$$\delta F = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix},$$

δ désignant le déterminant du troisième ordre

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

que nous supposons différent de zéro.

F est alors une fonction homogène et du second degré des fonctions linéaires X, Y, Z, et, comme les plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ se coupent en un point unique, l'équation $F = 0$ représente un cône.

II. — Conditions pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre sont

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0.$$

Elles sont nécessaires; car, si l'équation $F = 0$ représente un cylindre, la surface a une ligne de centres; par suite, il existe une relation linéaire et homogène entre les trois dérivées de F par rapport à x, y, z

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0;$$

on a donc, entre les quantités λ, μ, ν qui ne sont pas toutes nulles, les quatre relations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} A\lambda + B''\mu + B'\nu = 0, \\ B''\lambda + A'\mu + B\nu = 0, \\ B'\lambda + B\mu + A''\nu = 0, \\ C\lambda + C'\mu + C''\nu = 0; \end{cases}$$

par suite, les quatre déterminants du troisième ordre formés avec les coefficients de ces équations prises trois à trois sont nuls.

Nous les désignerons par δ, δ_1, δ_2, δ_3; δ étant l'invariant de la fonction homogène des trois variables x, y, z qui figure dans F et δ_1, δ_2, δ_3 les caractéristiques du troisième ordre des équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Si la surface est un cylindre, on a donc

$$\delta = 0, \qquad \delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \delta_3 = 0.$$

Or δ, δ_1, δ_2, δ_3 sont les coefficients de D, C'', C', C dans le développement de Δ suivant les éléments de la der-

nière colonne; Δ est donc nul; par suite, les conditions $\Delta = 0$, $\delta = 0$ sont nécessaires.

Ces conditions sont suffisantes.

En effet, des relations $\Delta = 0$, $\delta = 0$ on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction homogène et du second degré par rapport à C, C', C'' et de la forme

$$\alpha C^2 + \alpha' C'^2 + \alpha'' C''^2 + 2\beta C''C' + 2\beta' CC'' + 2\beta'' C'C = 0;$$

les coefficients α, α', α'', β, β', β'' sont les éléments du déterminant adjoint de δ. Or, par hypothèse, $\delta = 0$; par suite, les mineurs du second ordre du déterminant adjoint sont tous nuls; on a donc

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' - \beta''^2 &= 0, & \alpha\beta - \beta'\beta'' &= 0, \\ \alpha'\alpha'' - \beta^2 &= 0, & \alpha'\beta' - \beta''\beta &= 0, \\ \alpha''\alpha - \beta'^2 &= 0, & \alpha''\beta'' - \beta\beta' &= 0; \end{aligned}$$

ces mineurs étant ceux de l'invariant de la fonction homogène en C, C', C'', il s'ensuit que cette fonction homogène est un carré parfait.

Cette fonction est, par suite, le carré de l'une quelconque de ses dérivées par rapport à C, C', C''; la fonction étant nulle, les trois dérivées sont nulles; on a donc

$$\begin{aligned} \alpha C + \beta'' C' + \beta' C'' &= 0, \\ \beta'' C + \alpha' C' + \beta C'' &= 0, \\ \beta' C + \beta C' + \alpha'' C'' &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations ne sont autres que $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$; les quatre équations (α) sont donc satisfaites

pour des valeurs de λ, μ, ν, non toutes nulles; par suite, il existe, entre les dérivées X, Y, Z, la relation identique

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0;$$

la surface est donc un cylindre.

III. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux plans.

Il faut exprimer d'abord que la surface est un cylindre, d'où

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0;$$

il faut ensuite que les traces de ce cylindre sur chacun des trois plans de coordonnées soient un système de deux droites.

On obtient ainsi les trois relations

$$\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & D \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0,$$

ce que l'on peut écrire d'une manière plus simple

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0.$$

Les conditions

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0$$

sont évidemment suffisantes pour que l'équation $F = 0$ représente un système de deux plans.

Il est aisé de montrer que ces conditions se ramènent

à trois équations distinctes

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0.$$

Pour le faire voir, nous allons établir que, sous la condition $\Delta = 0$, on a, entre les mineurs de Δ, les relations

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A'} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial A'}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A''} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial A''}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B'}\right)^2 = 0,$$

qui montrent que les trois quantités $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont de même signe et, par suite, sont nulles toutes les trois, lorsque leur somme est nulle.

Soit Θ le déterminant adjoint du déterminant Δ, c'est-à-dire le déterminant dont les éléments sont $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial D}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial B}$, ..., que nous désignerons, pour abréger, par a, a', a'', d, b, b', b'', c, c', c''; on aura

$$\Theta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix}.$$

En faisant le produit de Θ par le déterminant Θ_1,

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix},$$

il viendra

$$\Theta\Theta_1 = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix};$$

comme $\Theta = \Delta^3$, l'égalité précédente devient

$$\Delta^3 \Theta_1 = (aa' - b''^2)\Delta^2$$

ou

$$\Delta\Theta_1 = (aa' - b''^2).$$

Si donc $\Delta = 0$, on aura

$$aa' - b''^2 = 0.$$

Or

$$a = \frac{\partial\Delta}{\partial A}, \qquad a' = \frac{\partial\Delta}{\partial A'}, \qquad b'' = \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial B''};$$

par suite,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}\frac{\partial\Delta}{\partial A'} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)^2 = 0.$$

On établirait de la même manière les deux autres relations, ce qui montre que $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont de même signe, et, par suite, si leur somme est nulle, chacune de ces quantités est nulle.

Toutefois, pour affirmer que les trois quantités $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont de même signe, il faut que les trois mineurs

$$\frac{\partial\Delta}{\partial B}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial B'}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial B''}$$

ne soient pas nuls à la fois; si on les suppose nuls, deux des quantités $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont nulles, et, par suite, la condition

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0$$

entraîne la nullité des trois quantités

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial A'}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial A''}.$$

Remarquons que les conditions précédentes entraînent la nullité de tous les mineurs du troisième ordre de Δ.

IV. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un paraboloïde.

On sait que cette condition est

$$\delta = 0.$$

Nous ne nous y arrêterons pas.

V. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre parabolique.

Il faut et il suffit, pour cela, que la fonction homogène du second degré aux trois variables x, y, z qui figure dans F soit un carré parfait. On sait que les mineurs du second ordre de l'invariant δ sont nuls dans ce cas, et ces conditions sont suffisantes.

Il est aisé de montrer que les six égalités qu'on obtient ainsi peuvent être remplacées par

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial A} + \frac{\partial\delta}{\partial A'} + \frac{\partial\delta}{\partial A''} = 0.$$

On a en effet les identités

$$\frac{\partial\delta}{\partial A}\frac{\partial\delta}{\partial A'} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\delta}{\partial B''}\right)^2 = A''\delta,$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial A'}\frac{\partial\delta}{\partial A''} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\delta}{\partial B}\right)^2 = A\delta,$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial A''}\frac{\partial\delta}{\partial A} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\delta}{\partial B'}\right)^2 = A'\delta,$$

qui nous montrent que les conditions

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0$$

entraînent

$$\frac{\partial \delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0,$$

avec

$$\frac{\partial \delta}{\partial B} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial B'} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial B''} = 0.$$

Les deux équations

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0$$

équivalent à trois conditions distinctes entre les coefficients.

VI. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux plans parallèles.

Il faut d'abord que

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0,$$

car l'équation d'un système de deux plans parallèles est nécessairement de la forme

$$(ax + by + cz)^2 + 2\lambda(ax + by + cz) + \mu = 0,$$

L'ensemble homogène des termes du second degré est donc un carré parfait. Il faut exprimer de plus que les traces de la surface sur les plans de coordonnées sont un système de deux droites; il faut donc ajouter aux conditions précédentes les conditions nouvelles

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0.$$

qui entraînent

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0.$$

Il reste à démontrer que les conditions

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial A} + \frac{\partial\delta}{\partial A'} + \frac{\partial\delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0,$$

sont suffisantes. Cela est évident, car si les deux premières équations sont satisfaites, la surface est un cylindre parabolique ; ces conditions entraînent $\Delta = 0$; par suite, si

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0,$$

les trois déterminants

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial A'}, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial A''}$$

sont nuls ; les traces de la surface sur les trois plans de coordonnées sont donc des systèmes de droites parallèles. La directrice du cylindre parabolique est alors un système de deux droites parallèles et le cylindre se réduit à deux plans parallèles.

Les trois équations précédentes équivalent à cinq conditions distinctes.

VII. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un plan double.

Il faut d'abord que les trois équations

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial A} + \frac{\partial\delta}{\partial A'} + \frac{\partial\delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0$$

soient satisfaites; il faut ensuite exprimer que les traces de la surface sur les trois plans de coordonnées sont des droites doubles.

Il est aisé de voir qu'aux conditions précédentes il faut ajouter

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A\, \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A''}\, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A} = 0.$$

Pour le démontrer, cherchons la trace de la surface sur le plan des xy; son équation est

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y + D = 0:$$

il faut exprimer que cette équation représente une droite double.

Puisque nous avons déjà $\frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0$, cette équation représente un système de deux droites; ces deux droites sont parallèles puisque $\frac{\partial \delta}{\partial A''}$ est aussi nul; il faut enfin que les traces de ces droites sur les axes soient confondues pour que les deux droites soient elles-mêmes confondues; on a ainsi

$$C^2 - AD = 0, \qquad C'^2 - A'D = 0.$$

les égalités ne sont autres que

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A} = 0.$$

Mais si la somme

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A}$$

est nulle, avec

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0,$$

chacune de ces quantités est nulle.

Cela résulte en effet de l'identité

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial B''}\right)^2 = D \frac{\partial \Delta}{\partial A''};$$

le second membre étant nul, les deux quantités

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'}, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A}$$

sont de même signe, et par suite, si leur somme est nulle, chacune de ces quantités est nulle, et cela a lieu encore si $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial B''}$ est nul.

Comme on en dirait autant des traces de la surface sur les autres plans de coordonnées, les trois déterminants

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'}, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A \, \partial A''}, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A}$$

sont de même signe et, si leur somme est nulle, chacun d'eux est nul; la propriété précédente subsiste encore si, dans la démonstration, on suppose nuls les déterminants analogues à $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial B''}$; la condition

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A \, \partial A''} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A} = 0$$

entraîne donc la nullité des trois déterminants.

Les conditions précédentes sont évidemment suffisantes.

Pour que l'équation générale du second degré représente un plan double, il faut et il suffit donc que l'on ait

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} + \frac{\partial \Delta}{\partial A'} + \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A \, \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A''} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A} = 0.$$

Ces équations équivalent à six conditions distinctes.

SOLUTION DE LA QUESTION 1590;

Par M. le Capitaine BARISIEN.

Δ étant le lieu des pôles d'une droite D *par rapport à un système de coniques homofocales, trouver le lieu des points de rencontre de* D *et de* Δ, *lorsque* D *pivote autour d'un point fixe.* (H. Valdo.)

L'équation générale d'un système de coniques homofocales est

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1. \tag{1}$$

Soit

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1 \tag{2}$$

l'équation de la droite D.

Cherchons d'abord le lieu Δ des pôles de la droite D.

La polaire d'un point (X, Y) a pour équation

$$\frac{xX}{a^2+\lambda}+\frac{yY}{b^2+\lambda}=1. \tag{3}$$

Identifions (2) et (3), il vient

$$AX = a^2+\lambda,$$
$$BY = b^2+\lambda.$$

En éliminant λ entre ces deux relations, on voit que le lieu Δ est une droite

$$AX - BY = a^2 - b^2 = c^2, \tag{4}$$

perpendiculaire à la droite D.

Si la droite D pivote autour d'un point fixe (α, β), on a la relation

$$(5) \qquad A\beta + B\alpha = AB.$$

Pour avoir le lieu des points de rencontre de D et de Δ, il faut éliminer A et B entre l'équation (5) et les deux suivantes

$$(6) \qquad Ay + Bx = AB,$$
$$(7) \qquad Ax - By = c^2.$$

En retranchant (5) et (6), on a

$$A(y - \beta) + B(x - \alpha) = 0.$$

En combinant cette dernière équation avec (7), on en tire A et B

$$A = \frac{c^2(x - \alpha)}{x(x - \alpha) + y(y - \beta)}, \qquad B = \frac{-c^2(y - \beta)}{x(x - \alpha) + y(y - \beta)}.$$

En portant ces valeurs de A et B dans l'équation (5), on a pour l'équation du lieu

$$(\beta x - \alpha y)[x(x - \alpha) + y(y - \beta)] + c^2(x - \alpha)(y - \beta) = 0.$$

Cette courbe du quatrième degré est une strophoïde oblique ayant le point donné pour point double et son asymptote parallèle à la ligne joignant ce point au centre des coniques.

L'équation de cette asymptote est, du reste,

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{c^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME VIII, 3e SÉRIE).

Algèbre.

Géométrie pure.

Géométrie analytique à deux dimensions.

Géométrie analytique à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique.

Sujets de composition donnés à divers concours.

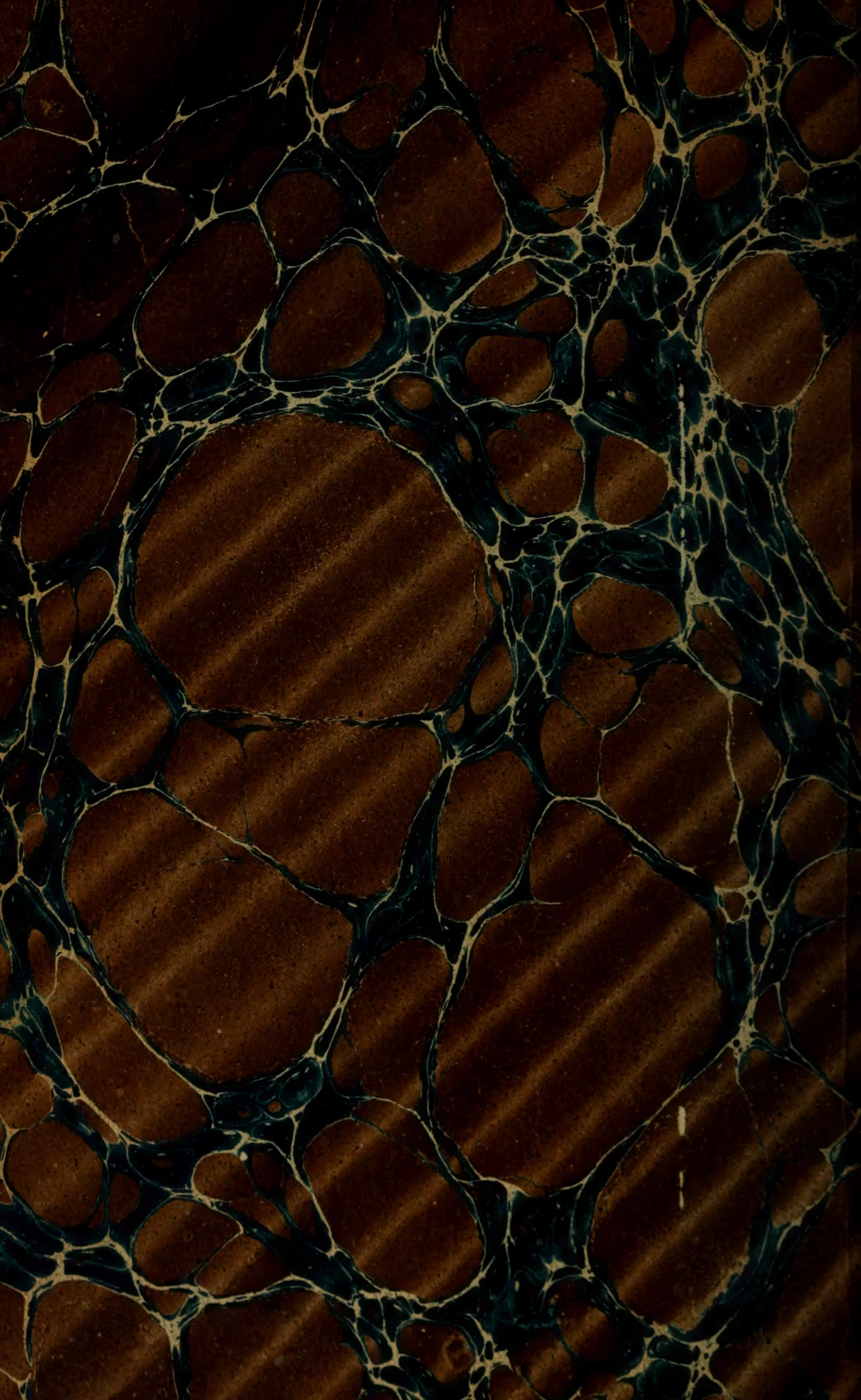
Mélanges.

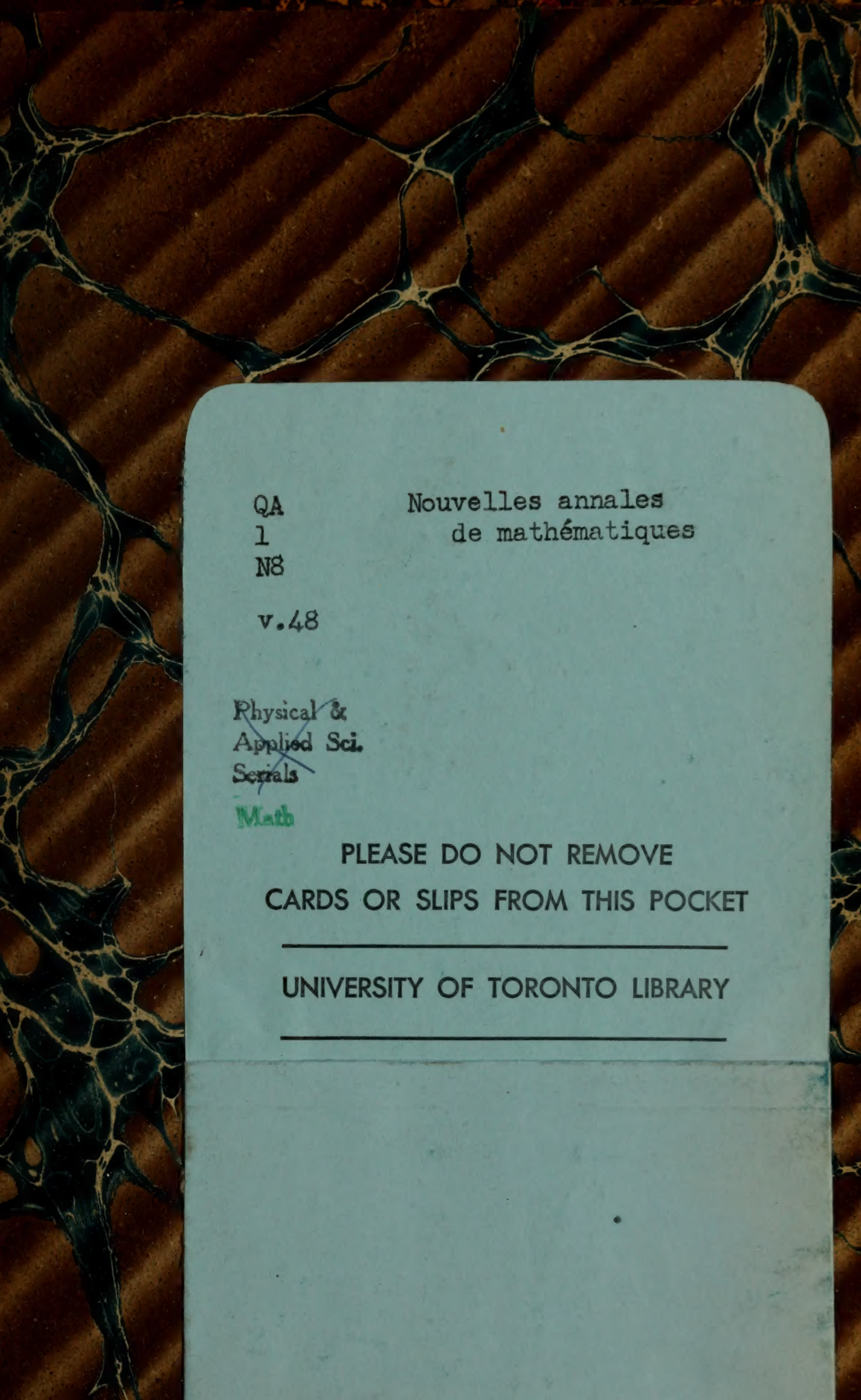
TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME VIII, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

14975 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS quai des Grands-Augustins, 55.




QA
1
N8
v.48
Nouvelles annales
de mathématiques
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

